macmillan education

Omar Vigueras Herrera
Elhoim Llorente | Sumano y Ramírez
René Bañuelos Bañuelos
René Jara Rodríguez

Matemáticas 3

SERIE APRENDAMOS

SECUNDARIA TERCER GRADO

Matemáticas 3 (Serie Aprendamos)
Secundaria

Diseño e ilustración D.R. © Macmillan Publishers, S.A. de C.V. 2015
Texto D.R. © Omar Vigueras Herrera, Elhoim Llorente I Sumano y Ramírez,
René Bañuelos Bañuelos, René Jara Rodríguez

Primera edición 2015

Diseño y coordinación editorial: Futura Textos, S. A. de C. V.
Coordinación editorial, Futura Textos: Juana Laura Vega Carmona
Concepto de diseño, Futura Textos: Rocío Mireles Gavito
Editores: Juana Laura Vega Carmona, Diana Alicia Navarro Góngora
Corrector de Estilo: Eduardo Méndez Olmedo

Concepto y diseño de portada: Ana Castillo
Fotografías de portada: Shutterstock
Diseño y formación: Bruno Contreras García

Ilustración: Leonardo Olguín: pp. 30, 47, 56, 67, 88(3), 98, 104, 108, 130(1), 150, 175(1), 177, 192, 193, 196, 208(2), 228(2), 238, 245, 249, 265.
Mario Grimaldo González y Víctor Eduardo Sandoval Ibañez: pp. 209, 250, 259, 260, 263.

Fotografía: Luis Enrique Aguilar p. 58; Salatiel Barragán p. 90;
Futura Textos pp. 43, 89, 115, 130(2), 132, 173, 175(2), 176, 246.

ISBN de la serie: 978-607-473-478-2

Macmillan Publishers, S.A de C.V.
Insurgentes Sur 1886
Col. Florida, CP 01030
México, D.F.
Tel: (55) 5482 2200
elt@grupomacmillan.com

Macmillan ® es una marca registrada

www.grupomacmillan.com
www.macmillan.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 2275

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir [mes, año] en los talleres de [datos de imprenta]

2019 2018 2017 2016 2015
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Presentación para el maestro

Los autores ponemos a su disposición el libro *Matemáticas 3* de la serie Aprendamos, que fomenta el trabajo colaborativo e incorpora metas individuales para el logro de los aprendizajes esperados. A través de la sección *Para aprender* propone diversas estrategias para mejorar los hábitos de estudio de los alumnos. Este material pretende ser, en concordancia con las exigencias educativas y sociales de nuestro país, un apoyo directo tanto a su práctica docente como al desarrollo de las aptitudes matemáticas de los alumnos.

Con un enfoque centrado en el aprendizaje de los alumnos, este material contiene una innovadora propuesta que promueve la construcción de conceptos y el desarrollo de habilidades a través de la progresión de actividades que contribuyen a la formación integral del alumno. La didáctica para la enseñanza que ofrece este material se centra en la utilización de secuencias de situaciones problemáticas que sean un reto para los alumnos, de tal forma que éstos tengan la oportunidad de reflexionar como grupo y de construir en conjunto y en lo individual.

Se pretende también que al trabajar las distintas actividades se transite del lenguaje cotidiano a lo formal en las matemáticas, para así explicar, comunicar y validar los procedimientos y resultados obtenidos, utilizando técnicas de resolución eficientes y apropiadas. Una premisa para el desarrollo de las lecciones es que la mejor didáctica en el tratamiento de los contenidos temáticos es la que cada docente decide aplicar en su aula; por ello, al generar ambientes propicios para el aprendizaje se darán las condiciones que lleven a la consecución de los estándares curriculares y de los propósitos de la asignatura explícitos en los programas de estudio.

Se espera, pues, que con la ayuda de este material, tanto docentes como alumnos alcancen aquellas metas de enseñanza y de aprendizaje que contribuyan a construir una mejor sociedad y un mejor país.

Presentación para el alumno

El libro *Matemáticas 3* de la serie Aprendamos tiene un único objetivo: el que ustedes aprendan y disfruten las matemáticas. Por ello hemos diseñado una serie de lecciones pensadas para que, a partir de situaciones problemáticas, ustedes tengan la oportunidad de desarrollar sus habilidades; cada lección les brindará la oportunidad de aprender paso a paso, de construir sus aprendizajes en conjunto con sus compañeros y de valorar sus aciertos y errores.

Las matemáticas están presentes en cada detalle de la vida cotidiana, en cada lugar y acontecimiento, por eso cada lección contiene aplicaciones prácticas que buscan desarrollar su pensamiento lógico y constituyen una invitación, pero también un desafío; se les invita a realizar un trabajo que genere aprendizajes, a tomar decisiones autónomas, a argumentar y aceptar las decisiones de los demás, a la vez que sus propias ideas se consensan; en este sentido, el desafío consistirá en resolver, en saber escuchar y en ser tolerantes con las ideas de los demás compañeros, a fin de que todos en conjunto alcancen los aprendizajes esperados; esta es la invitación y el desafío.

Se espera que con la ayuda de este material, tanto sus docentes como ustedes alcancen aquellas metas –de enseñanza y de aprendizaje– que contribuyan a formar mejores ciudadanos y a construir una mejor sociedad y un mejor país.

Conoce tu libro

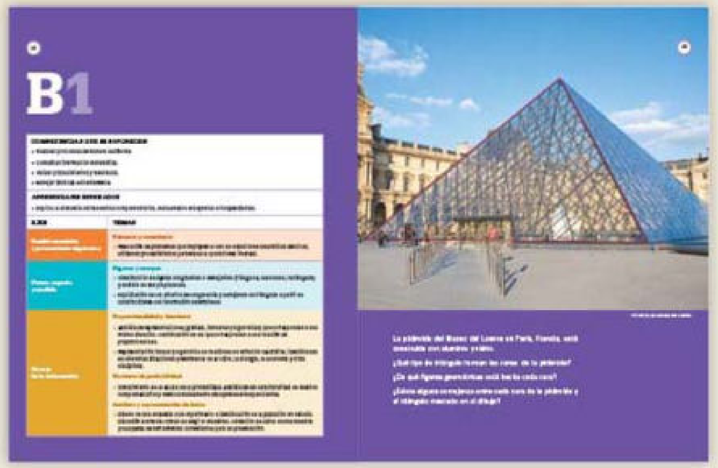
Para aprender

Esta sección está diseñada para mejorar tus hábitos de estudio mediante diversas recomendaciones y herramientas que complementarán y facilitarán tu aprendizaje.

Portada de bloque

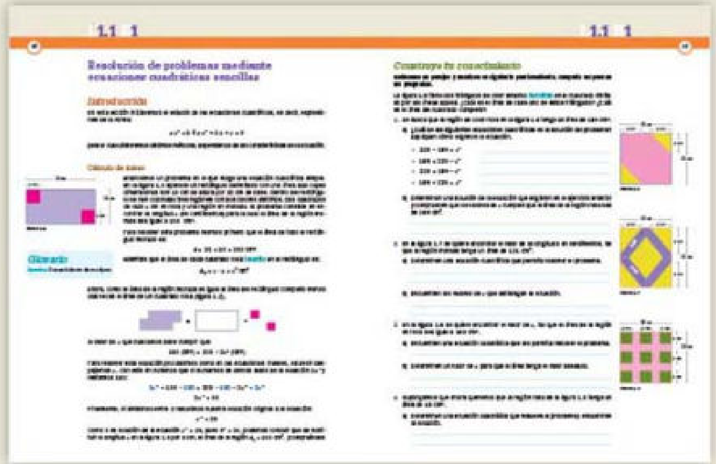
En ella encontrarás una imagen relacionada con los temas que estudiarás en el bloque, además de un texto breve o una serie de preguntas para que reflexiones acerca de las aplicaciones de las matemáticas en diversos contextos de la vida cotidiana.

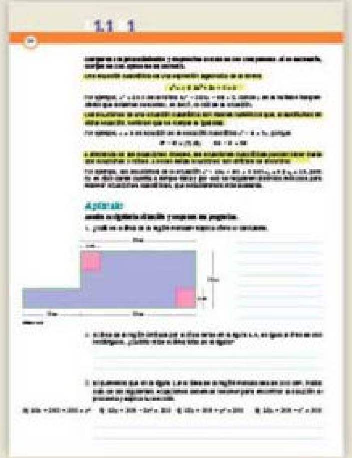
"B1" se refiere al número de bloque que corresponde.

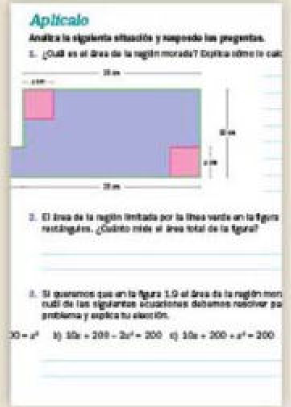


¿Qué tanto sabes?

Esta sección está diseñada para que evalúes tus conocimientos previos. Consta de diversas actividades que te permitirán repasar lo que has aprendido en tus cursos anteriores de Matemáticas, y que utilizarás para comprender los temas del bloque.







Lecciones

En cada inicio de lección se señalan, el tema, el eje y los conocimientos por aprender. La simbología L1.1 hace referencia al número de lección y al tema que se estudiará.

Introducción

Todas las lecciones de tu libro comienzan con una introducción a los temas que estudiarás y con una serie de actividades que te permitirán reflexionar acerca de ellos.

Construye tu conocimiento

Esta sección está diseñada para que, por medio de diversas actividades específicas, construyas tus conocimientos. Se sugiere que la mayoría las lleves a cabo junto con otro compañero, a fin de que intercambien ideas y técnicas para desarrollar procedimientos y obtener de manera autónoma los conocimientos que necesitas aprender.

Aplícalo

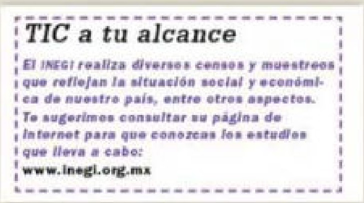
En esta sección podrás aplicar conocimientos que vas aprendiendo de la lección. Puedes resolverla de manera individual o junto con un compañero, para fomentar el trabajo colaborativo y el intercambio de ideas.

Glosario

Aquí encontrarás la definición de aquellos términos y palabras que necesitas saber para comprender los contenidos y las actividades de las lecciones.

TIC a tu alcance

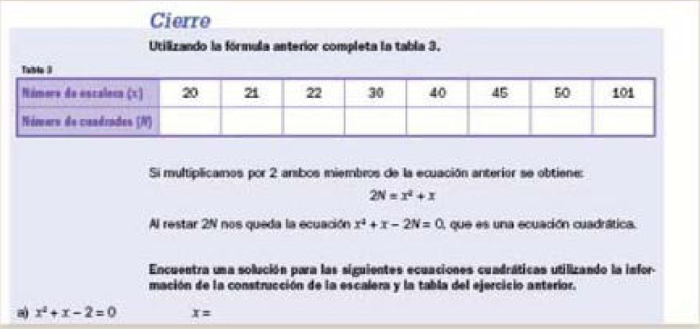
Aquí encontrarás sugerencias para consultar sitios de internet que te permitirán complementar y ampliar tus conocimientos de los contenidos estudiados en las lecciones.


TIC a tu alcance

El INEGI realiza diversos censos y muestreos que reflejan la situación social y económica de nuestro país, entre otros aspectos. Te sugerimos consultar su página de Internet para que conozcas los estudios que lleva a cabo:
www.inegi.org.mx

Cierre

En esta sección se formalizan los contenidos aprendidos durante la lección.


Cierre

Utilizando la fórmula anterior completa la tabla 3.

Tabla 3

Número de escalera (x)	20	21	22	30	40	45	50	101
Número de cuadrados (N)								

Si multiplicamos por 2 ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene:

$$2N = x^2 + x$$

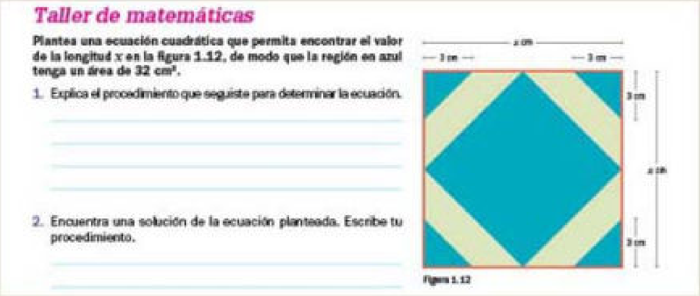
Al restar $2N$ nos queda la ecuación $x^2 + x - 2N = 0$, que es una ecuación cuadrática.

Encuentra una solución para las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la información de la construcción de la escalera y la tabla del ejercicio anterior.

a) $x^2 + x - 2 = 0$ $x =$

Taller de matemáticas

Esta sección está diseñada para que apliques los conocimientos aprendidos durante la lección. Fomenta el trabajo colaborativo, la reflexión, el planteamiento de diversas situaciones, la aplicación de técnicas de resolución de problemas y el uso del lenguaje matemático.


Taller de matemáticas

Plantea una ecuación cuadrática que permita encontrar el valor de la longitud x en la figura 1.12, de modo que la región en azul tenga un área de 32 cm².

1. Explica el procedimiento que seguiste para determinar la ecuación.
2. Encuentra una solución de la ecuación planteada. Escribe tu procedimiento.

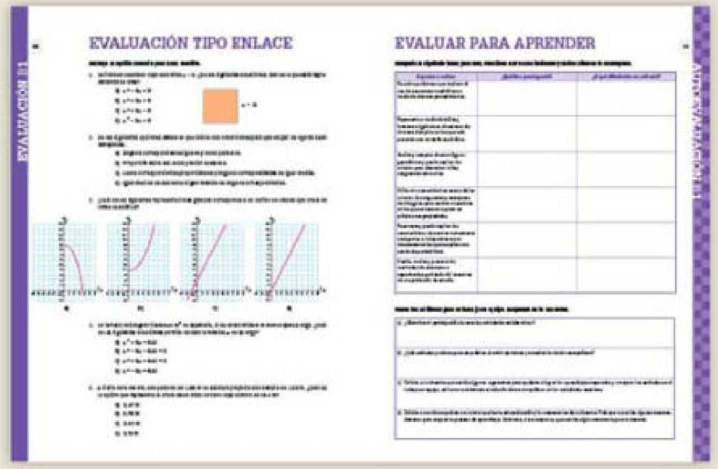
Figura 1.12

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

Encontrarás esta sección al finalizar cada bloque. Está diseñada para complementar tu aprendizaje. En ella encontrarás información relacionada con los aprendizajes del bloque, como historia de las matemáticas, aplicaciones en diversas disciplinas y problemas específicos que resolvieron grandes matemáticos de la historia.

EVALUACIÓN TIPO PISA

Esta sección está diseñada para evaluar los conocimientos que aprendiste en cada bloque. Se plantean situaciones en las que deberás aplicar los contenidos estudiados y que requieren de la reflexión, el planteamiento y el uso de técnicas de resolución de problemas.



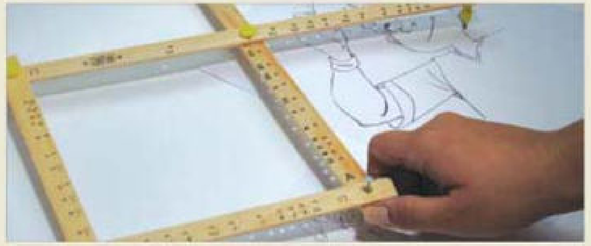
EVALUACIÓN TIPO ENLACE

Esta sección está diseñada para que practiques para la prueba Enlace que deberás presentar antes de finalizar el ciclo escolar.

EVALUAR PARA APRENDER

Esta sección aparece al final de cada bloque. Está diseñada para que reflexiones acerca de tu desempeño durante el bimestre; también te ayudará a valorar tus actitudes para el trabajo colaborativo.

Índice



Para aprender

Valora tu método de estudio, para ello lee las siguientes preguntas y, en parejas, coméntenlas y reflexionen sobre sus actitudes respecto de los cursos de matemáticas que han llevado hasta este momento. Así podrán identificar cuáles son las técnicas de estudio y aprendizaje que utilizan, cuáles se les facilitan y cuáles necesitan reforzar con ayuda de su docente.

- De los temas de tus cursos de matemáticas I y II, ¿cuáles te gustaron más y por qué?
- ¿Has utilizado el lenguaje y los procedimientos matemáticos para resolver problemas de la vida cotidiana? ¿En qué situaciones?
- ¿Qué haces regularmente cuando tu docente explica en clase los procedimientos que se utilizaron para resolver las actividades?
- ¿Aprendes y utilizas las técnicas que expusieron tus compañeros o tu docente? ¿Cómo?
- ¿Cuáles son las técnicas que hacen que obtengas mejores resultados en tus cursos de matemáticas?
- ¿Compartes con tus compañeros las técnicas de estudio que te funcionan? ¿Cómo?
- ¿Aplicas el razonamiento matemático en la resolución de problemas de la vida cotidiana?
- Al trabajar en equipo, ¿qué aspectos de tu participación crees que son los más importantes?
- En este sentido, ¿qué necesitas mejorar?
- Regularmente, al hacer tus tareas, ¿trabajas de forma individual? ¿Qué diferencias positivas encuentras cuando te apoyan otras personas?
- ¿Eres tolerante con tus compañeros cuando expresan puntos de vista diferentes a los tuyos?
- ¿Qué necesitas hacer para tener una mejor convivencia y llegar a acuerdos en forma organizada con tus compañeros?
- ¿Cómo puedes apoyar a tus compañeros para que mejoren en la clase de matemáticas?
- En los distintos temas de la clase de matemáticas, ¿te sientes satisfecho cuando resuelves los problemas en forma individual?, ¿por qué?
- Independientemente de si te gusta estudiar matemáticas, ¿qué beneficios crees que podrías obtener al mejorar tu actitud hacia el aprendizaje de esta asignatura?

Una vez que hayas contestado reflexiona acerca de qué cosas estás haciendo bien y que te han ayudado a mejorar tu desempeño escolar, cuáles puedes mejorar y cuáles tienes que cambiar.

Recomendaciones para mejorar tu aprendizaje de las matemáticas

Las siguientes recomendaciones te ayudarán a mejorar tu aprendizaje y a entender que "hacer matemáticas para aprenderlas" también puede ser divertido. Por ello es muy importante que tomes nota de algunos puntos que te facilitarán el trabajo con los diferentes contenidos y ejercicios que realizas en clase y en casa, tanto de manera individual como colaborativa.

Cuando leas el planteamiento de una situación matemática hazlo atentamente hasta que comprendas lo que se está preguntando; examina si aparece una imagen, un mapa, una tabla o una gráfica que complementen la información, luego reflexiona sobre el tipo de información que aportan esos recursos y cómo te ayudan para obtener el resultado que se quiere encontrar.

Comenta con algún compañero, con el grupo y con tu docente acerca de las dudas sobre el planteamiento de la situación que intentas resolver, después elabora alguna propuesta de solución y justifícala utilizando otros conocimientos que ya hayas aprendido; también compara tus soluciones con las propuestas de otros compañeros, decidan en parejas, en equipos o con el grupo completo cuáles son los procedimientos más sencillos de realizar para llegar al resultado correcto; recuerda que en matemáticas no existe sólo un procedimiento, sino que muchas veces diferentes procedimientos conducen a la misma solución.

Utiliza herramientas matemáticas y recursos tecnológicos a tu alcance, tales como simuladores, internet y calculadora, y otros que pudieran parecer más sencillos, como el juego de geometría tradicional, aunque debes saber que las herramientas y las fórmulas por sí mismas no llevan a la solución; debes usarlas de forma que el desarrollo que se haga del tema te permita ir descubriendo más usos del recurso y la conexión que existe entre los diversos contenidos matemáticos abordados.

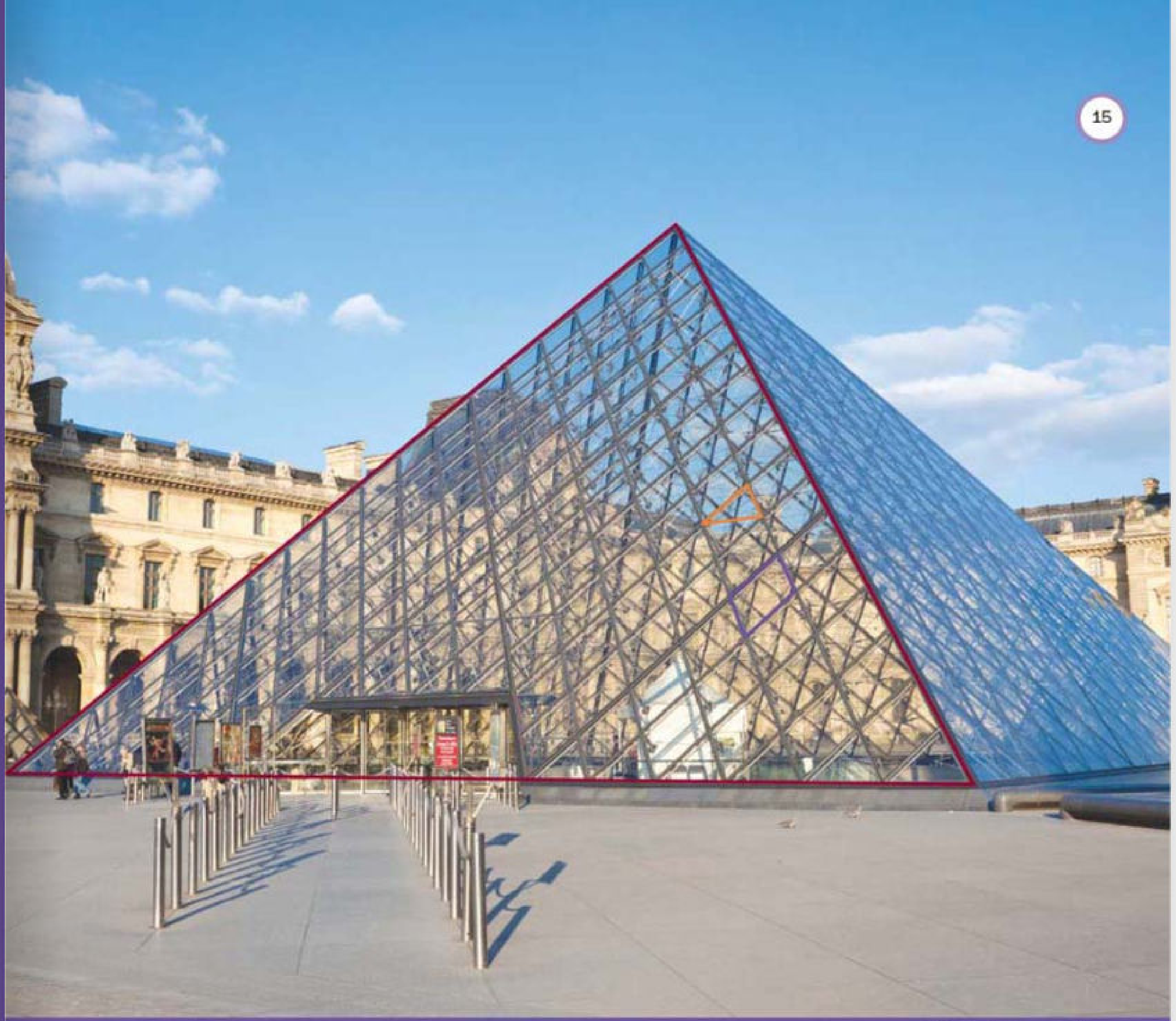
Recuerda que las paredes del aula pueden ser un recurso para recordar cosas importantes; para ello es necesaria la participación de todos: anoten en cartulinas la información relevante sobre los diferentes temas y contenidos tratados, los pasos para la solución de algún contenido en particular, pueden incluso anotar fórmulas y procedimientos matemáticos; con permiso de su docente, se pueden colocar las cartulinas en las paredes del aula, y recuerda que es importante renovarlas con otras nuevas durante el desarrollo del curso.

Finalmente, recuerda que puedes aprender de tus compañeros a la vez que de tu docente, pero debes estar constantemente atento a sus comentarios y a sus ideas, porque muchas veces la idea que casi te permite llegar a la solución de una determinada situación se complementa con las respuestas de los otros. Debes saber también que tus respuestas, que en un primer momento pudieran parecerte erróneas, pueden convertirse en el procedimiento o resultado correctos al enriquecerse o complementarse con las ideas de tus compañeros y con la guía de tu docente.

Aprovecha la oportunidad de poner en práctica los contenidos y las sugerencias que encontrarás en las secciones de este libro y en las actividades prácticas que se proponen durante el desarrollo de los temas, sabrás entonces que las matemáticas son divertidas y útiles.

B1

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN	
• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.	
APRENDIZAJES ESPERADOS	
• Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	
EJES	**TEMAS**
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados, rectángulos) y análisis de sus propiedades. • Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. • Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. **Nociones de probabilidad** • Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. **Análisis y representación de datos** • Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.



Pirámide del Museo del Louvre.

La pirámide del Museo del Louvre en París, Francia, está construida con aluminio y vidrio.

¿Qué tipo de triángulo forman las caras de la pirámide?

¿De qué figuras geométricas está hecha cada cara?

¿Existe alguna semejanza entre cada cara de la pirámide y el triángulo marcado en el dibujo?

¿QUÉ TANTO SABES?

Esta sección está diseñada para que reconozcas lo que has aprendido en tus cursos anteriores de Matemáticas y que ahora utilizarás para comprender los temas de este bloque. Resuelve las siguientes situaciones en tu cuaderno.

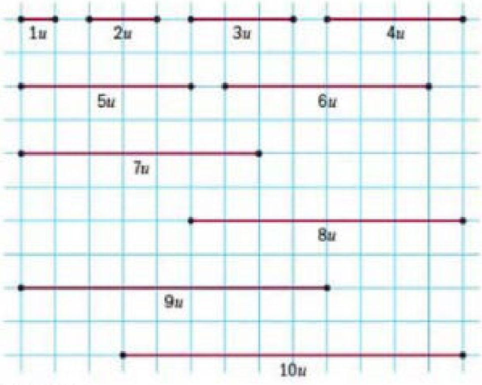


Figura 1.1

1. Se tienen diez varillas cuyas medidas de longitud son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 unidades respectivamente (figura 1.1). Responde.
   a) ¿Cuántos y cuáles son los cuadrados que pueden construirse con las varillas, sin usar la misma varilla más de una vez?
   b) Dibújalos en tu cuaderno o en una hoja milimétrica.

2. María encontró que puede formar el cuadrado más pequeño tal como aparece en la figura 1.2, y calculó su perímetro con la siguiente expresión:

$$P = (1u + 6u) + (2u + 5u) + (3u + 4u) + 7u = 28u$$

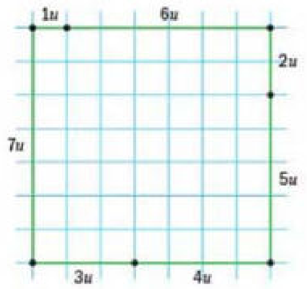


Figura 1.2

   a) ¿Cómo puedes calcular el área de la misma figura? Escríbela a continuación.
   b) Compara el área que obtuviste con la de dos compañeros, ¿se parecen? ¿Ambas expresiones permiten calcular el área del cuadrado? Explica tu respuesta.

3. Ahora, empleando las mismas varillas, traza en tu cuaderno rectángulos del mayor perímetro posible sin repetir ninguna. El perímetro se puede calcular mediante la expresión:

$$P = 2(a + b)$$

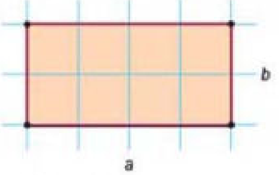


Figura 1.3

Donde *a* y *b* son los lados del rectángulo, como se ve en la figura 1.3.
   a) ¿Es posible formar rectángulos cuyo perímetro sea de 55 unidades? Explica tu respuesta.
   b) Si analizas con cuidado la ecuación para calcular el perímetro del rectángulo, te darás cuenta de que el resultado deberá ser par, ¿por qué?
   c) Si el resultado debe ser par, ¿cuál es el mayor perímetro que se puede formar usando todas las varillas?

4. Escribe los datos que faltan en la tabla 1 para responder las preguntas, utiliza la figura 1.4 como referencia y la relación entre las medidas de sus lados: $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$

$$P = (\overline{AB} + \overline{CD}) + (\overline{BC} + \overline{AD}) = 54u$$

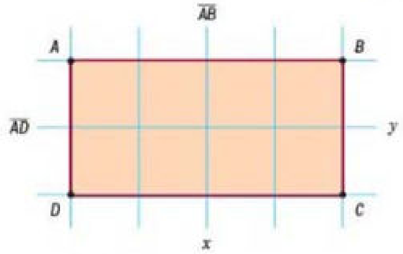


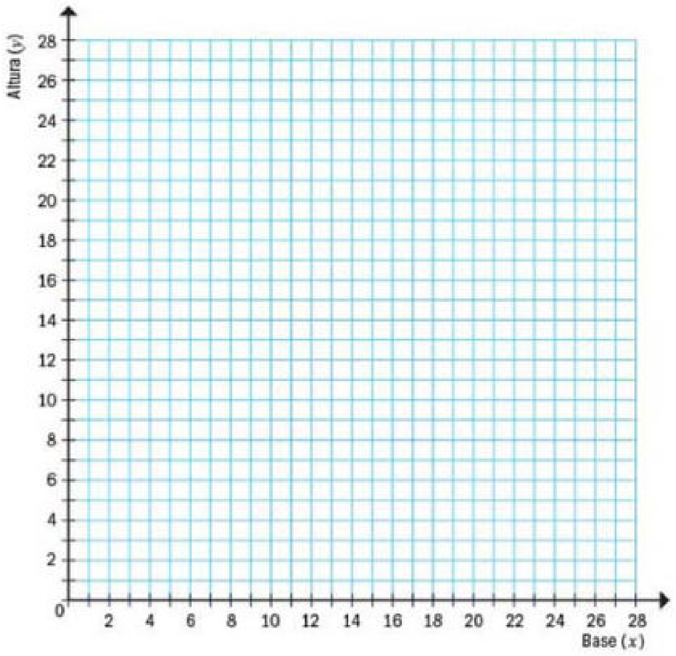
Figura 1.4

   a) ¿Cuántos rectángulos $P = 54u$ se pueden formar utilizando las nueve varillas restantes?
   b) Compara los datos de cada una de las filas de la tabla 1, ¿puedes identificar alguna regularidad? Descríbela.
   c) Escribe las ecuaciones que te permiten para calcular el perímetro y el área de cada rectángulo, considerando la base (x) y la altura (y).
   d) Escribe las ecuaciones para obtener el valor de x si se conoce el área del rectángulo.
   e) Escribe las ecuaciones para obtener el valor de y si se conoce el perímetro del rectángulo.

Tabla 1

Base (x) $\overline{AB} = \overline{CD}$	Altura (y) $\overline{BC} = \overline{AD}$	Perímetro (u)	Área (u^2)
5	22	54	110
6			
7			
8	19		152
9			
10			
11			
12	15		

5. Una vez que hayas identificado los valores de x y y en la tabla, localiza sus coordenadas en la siguiente gráfica. Une todos los puntos con una línea y prolóngala hasta que cruce ambos ejes, el de las abscisas (x) y el de las ordenadas (y), ¿a qué tipo de ecuación corresponde la representación gráfica que dibujaste? Justifica tu respuesta.



Resolución de problemas mediante ecuaciones cuadráticas sencillas

Introducción

En esta lección iniciaremos el estudio de las ecuaciones cuadráticas, es decir, expresiones de la forma:

$$a\,x^2 = b \text{ ó } a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

para lo cual utilizaremos distintos métodos, dependiendo de las características de la ecuación.

Cálculo de áreas

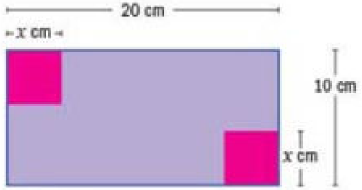


Figura 1.5

Analicemos un problema en el que surge una ecuación cuadrática simple. En la figura 1.5 aparece un rectángulo delimitado con una línea azul cuyas dimensiones son 10 cm de altura por 20 cm de base. Dentro del rectángulo se han coloreado tres regiones con dos colores distintos. Dos cuadrados de lado x cm en rosa y una región en morado. El problema consiste en encontrar la longitud x (en centímetros) para la cual el área de la región morada sea igual a 150 cm².

Para resolver este problema veamos primero que el área de todo el rectángulo morado es:

$$A = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2$$

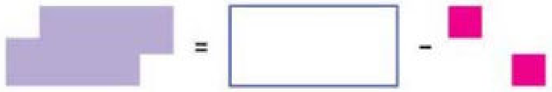
Glosario

Inscrito. Que está dentro de una figura.

Mientras que el área de cada cuadrado rosa **inscrito** en el rectángulo es:

$$A_R = x \cdot x = x^2 \text{ cm}^2$$

Ahora, como el área de la región morada es igual al área del rectángulo completo menos dos veces el área de un cuadrado rosa (figura 1.2),



el valor de x que buscamos debe cumplir que:

$$150\ (\text{cm}^2) = 200 - 2x^2\ (\text{cm}^2)$$

Para resolver esta ecuación procedamos como en las ecuaciones lineales, es decir despejemos x. Con este fin notemos que si sumamos de ambos lados de la ecuación $2x^2$ y restamos 150:

$$2x^2 + 150 - 150 = 200 - 150 - 2x^2 + 2x^2$$

$$2x^2 = 50$$

Finalmente, si dividimos entre 2 reducimos nuestra ecuación original a la ecuación:

$$x^2 = 25$$

Como 5 es solución de la ecuación $x^2 = 25$, pues $5^2 = 25$, podemos concluir que de sustituir la longitud x en la figura 1.5 por 5 cm, el área de la región $A_a = 150$ cm². ¡Compruébalo!

Construye tu conocimiento

Reúnanse en parejas y analicen el siguiente planteamiento, después respondan las preguntas.

La figura 1.6 tiene dos triángulos de color amarillo **inscritos** en el cuadrado limitado por las líneas azules. ¿Cuál es el área de cada uno de estos triángulos? ¿Cuál es el área del cuadrado completo?

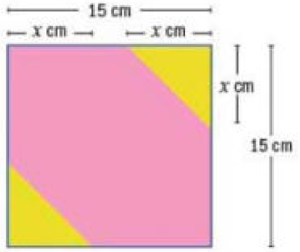


Figura 1.6

1. Se busca que la región de color rosa en la figura 1.6 tenga un área de 189 cm².
   a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas es la solución del problema? Expliquen cómo eligieron la ecuación.
      - $225 - 189 = x^2$ __________
      - $189 = 225 - x^2$ __________
      - $225 = 189 - x^2$ __________
      - $189 + 225 = x^2$ __________

   b) Determinen una solución de la ecuación que eligieron en el ejercicio anterior y comprueben que los valores de x cumplen que el área de la región rosa sea de 189 cm².

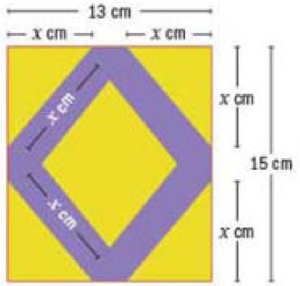


Figura 1.7

2. En la figura 1.7 se quiere encontrar el valor de la longitud x en centímetros, tal que la región morada tenga un área de 121 cm².
   a) Determinen una ecuación cuadrática que permita resolver el problema.

   b) Encuentren los valores de x que satisfagan la ecuación.

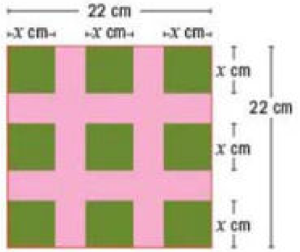


Figura 1.8

3. En la figura 1.8 se quiere encontrar el valor de x, tal que el área de la región en rosa sea igual a 160 cm².
   a) Encuentren una ecuación cuadrática que les permita resolver el problema.

   b) Determinen un valor de x para que el área tenga el valor deseado.

4. Supongamos que ahora queremos que la región rosa de la figura 1.8 tenga un área de 43 cm².
   a) Determinen una ecuación cuadrática que resuelva el problema y encuentren la solución.

Comparen sus procedimientos y respuestas con las de sus compañeros. Si es necesario, corríjanlos con ayuda de su docente.

Una ecuación cuadrática es una expresión algebraica de la forma:

$$x^2 = c \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Por ejemplo, $x^2 = 45$ o de la forma $5x^2 - 200x - 68 = 0$, donde x es la *variable independiente* que estamos buscando, es decir, la raíz de la ecuación.

Las soluciones de una ecuación cuadrática son valores numéricos que, al sustituirlos en dicha ecuación, verifican que se cumple la igualdad.

Por ejemplo, $x = 8$ es solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 8 = 7x$, porque:

$$8^2 - 8 = (7)(8), \qquad 64 - 8 = 56$$

A diferencia de las ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas pueden tener hasta dos soluciones o raíces. A veces estas soluciones son difíciles de encontrar.

Por ejemplo, las soluciones de la ecuación $x^2 - 19x + 60 = 0$ son $x_1 = 9$ y $x_2 = 15$, pero no es fácil darse cuenta a simple vista y por ello se requieren distintos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, que estudiaremos más adelante.

Aplícalo

Analiza la siguiente situación y responde las preguntas.

1. ¿Cuál es el área de la región morada? Explica cómo lo calculaste.

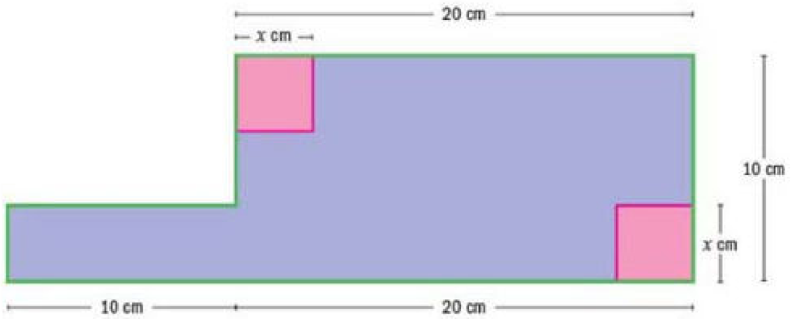


Figura 1.9

2. El área de la región limitada por la línea verde en la figura 1.9, es igual al área de dos rectángulos. ¿Cuánto mide el área total de la figura?

3. Si queremos que en la figura 1.9 el área de la región morada sea de 200 cm², indica cuál de las siguientes ecuaciones debemos resolver para encontrar la solución al problema y explica tu elección.

a) $10x + 200 + 200 = x^2$ b) $10x + 200 - 2x^2 = 200$ c) $10x + 200 + x^2 = 200$ d) $10x + 200 - x^2 = 200$

4. Encuentra dos soluciones de la ecuación que señalaste en el ejercicio anterior. ¿Cuánto debe medir x (en centímetros) en la figura 1.9 para que la región morada tenga un área de 200 cm²?

5. Señala la ecuación cuadrática que determina los valores que debe cumplir x para que la región morada de la figura 1.9 tenga un área de 212 cm². Explica tu elección.

a) $10x + 200 - 2x^2 = 212$ b) $10x + 200 + x^2 = 212$ c) $10x + 200 - x^2 = 212$ d) $10x + 200 + 212 = x^2$

6. De las siguientes ecuaciones, ¿cuál de ellas se obtiene al despejar la x^2 de la ecuación del ejercicio anterior? Escribe el procedimiento para obtener la respuesta que elegiste.

a) $x^2 = 10x - 6$ b) $x^2 = 5x - 6$ c) $x^2 = -5x + 6$ d) $x^2 = 6$

7. ¿Qué valor de x cumple que el área de la región morada en la figura 1.9 sea de 212 cm²? Escribe el procedimiento que debes seguir para encontrar dicho valor.

Contando con ecuaciones cuadráticas

Ahora analicemos un problema en el que aparecen ecuaciones cuadráticas más complicadas, pero con soluciones sencillas de encontrar.

En la figura 1.10 se ilustran los primeros seis términos de una sucesión de escaleras hechas con cuadrados azules.

Tabla 2

Número de escalera	Número de cuadrados en la escalera
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21

Escalera 1
Escalera 2
Escalera 3
Escalera 4
Escalera 5
Escalera 6

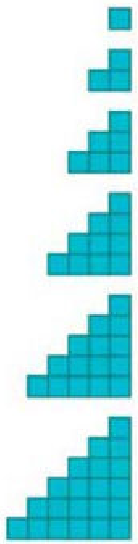


Figura 1.10

Vamos ahora a contar el número de cuadrados (tabla 2) que se utilizarían en una escalera como las de la figura 1.10, ¡pero con x escalones!

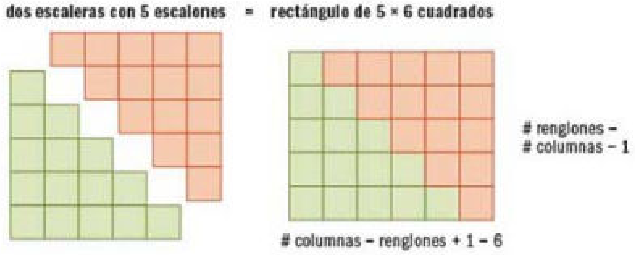


Figura 1.11

Para saber cómo calcular el número de cuadrados de una escalera con x escalones, primero veamos la figura 1.11.

Si tenemos dos escaleras con cinco escalones, podemos formar un rectángulo cuya altura contenga tantos renglones como escalones en la escalera original, y su base tenga tantas columnas como escalones más uno. De la construcción de la figura 1.11 encontramos que el número de cuadrados en la escalera con cinco escalones es igual a:

$$\frac{1}{2}(5 \times 6) = \frac{1}{2}(30) = 15 \text{ cuadrados, es decir, la mitad de } 5 \times 6$$

Si unimos dos escaleras con x escalones podemos construir un rectángulo de x renglones y $x + 1$ columnas. Así, el número de cuadrados en la escalera con x escalones es igual al número de cuadrados del rectángulo que se obtiene con esta construcción; es decir, si nombramos con la letra N al número de cuadrados en la escalera con x escalones, tenemos que:

$$N = \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Cierre

Utilizando la fórmula anterior completa la tabla 3.

Tabla 3

Número de escalera (x)	20	21	22	30	40	45	50	101
Número de cuadrados (N)								

Si multiplicamos por 2 ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene:

$$2N = x^2 + x$$

Al restar $2N$ nos queda la ecuación $x^2 + x - 2N = 0$, que es una ecuación cuadrática.

Encuentra una solución para las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la información de la construcción de la escalera y la tabla del ejercicio anterior.

a) $x^2 + x - 2 = 0$ $x =$

b) $x^2 + x - 12 = 0$ $x =$

c) $x^2 + x - 30 = 0$ $x =$

d) $x^2 + x - 420 = 0$ $x =$

e) $x^2 + x - 1640 = 0$ $x =$

Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros. Analicen las diferentes formas de llegar a un resultado.

Taller de matemáticas

Plantea una ecuación cuadrática que permita encontrar el valor de la longitud x en la figura 1.12, de modo que la región en azul tenga un área de 32 cm².

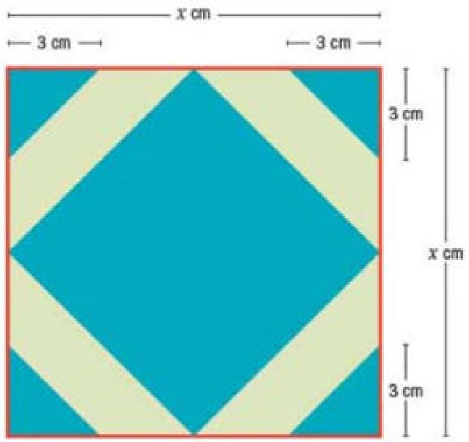


Figura 1.12

1. Explica el procedimiento que seguiste para determinar la ecuación.

2. Encuentra una solución de la ecuación planteada. Escribe tu procedimiento.

En la figura 1.13 aparecen los primeros tres términos de una sucesión infinita de tableros. El número de cuadrados rosas en cada tablero de la sucesión satisface la siguiente ecuación cuadrática:

$$N = 2x^2 - 2x + 1$$

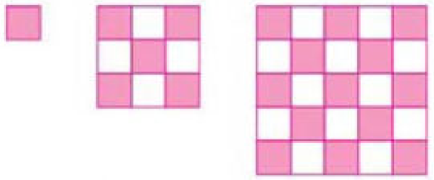


Figura 1.13

Donde N es igual al número de cuadrados rosas de los que está hecho el tablero x.

1. Completa la siguiente tabla.

Número de tablero (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de cuadrados (N)								

Utiliza la información de las tablas 2 y 3 para encontrar una solución a las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - x = 0$ $x =$

b) $x^2 - x - 2 = 0$ $x =$

c) $x^2 - x - 6 = 0$ $x =$

d) $x^2 - x - 30 = 0$ $x =$

e) $x^2 - x - 56 = 0$ $x =$

Construcción de figuras congruentes o semejantes

Introducción

Glosario

Superponer. *Añadir algo o ponerlo encima de otra cosa.*

Probablemente te has enfrentado al problema de decidir si dos figuras son iguales, es decir, si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Para verificar la igualdad de dos figuras podemos realizar varios procedimientos: *desplazar*, *rotar* o *reflejar* una de ellas hasta **superponerla** con la otra, de tal modo que si ambas coinciden en forma y tamaño podemos asegurar que son iguales.

En esta lección construiremos figuras que tienen la misma forma y tamaño, y otras que sólo tienen la misma forma, pero su tamaño varía. Para ello utilizaremos triángulos, cuadrados y rectángulos.

A partir de la figura 1.14 comenta con tus compañeros las siguientes preguntas.

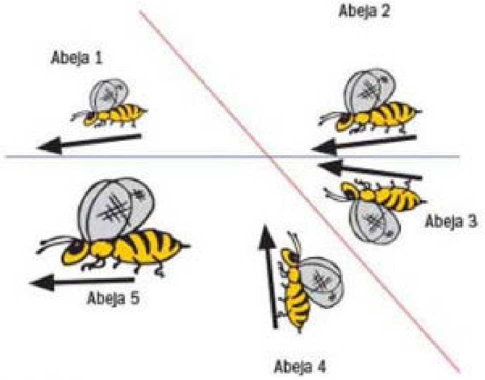


Figura 1.14

1. ¿Cuál de ellas es más grande?
2. ¿Las cuatro abejas tiene la misma forma?

Comenten en grupo cómo pueden determinar si las figuras son iguales o si sólo tienen la misma forma.

Trasladar una figura en el plano quiere decir que la desplazamos cierta distancia en una dirección dada, de tal manera que ni su forma ni su tamaño cambian.

Por ejemplo, en la figura 1.15 el triángulo *C* y el cuadrado *D* resultan de trasladar el triángulo *A* y el cuadrado *B* respectivamente, una distancia de 4 cm en la dirección de la línea punteada.

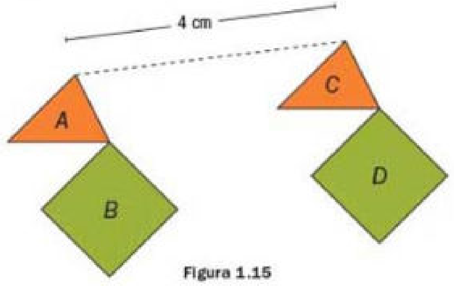


Figura 1.15

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen la siguiente ilustración y respondan las preguntas.

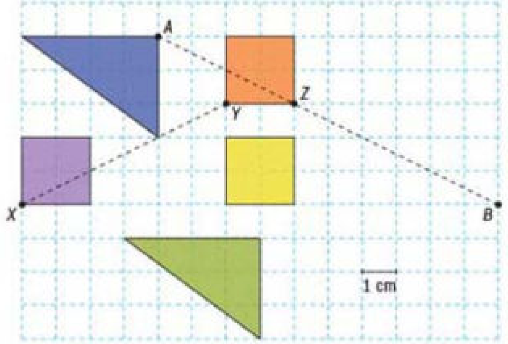


Figura 1.16

1. En la figura 1.16, ¿cuál es la figura geométrica que resulta al desplazar el cuadrado amarillo 6 cm hacia la izquierda? ______
2. ¿Qué figura se obtiene de trasladar el cuadrado morado en la dirección del segmento de línea *XY*?

   ______
3. ¿Qué distancia y en qué dirección debe trasladarse el cuadrado morado para superponerlo en el cuadrado amarillo? Dibujen sobre la figura 1.16 el segmento que indica la dirección de la traslación.

   ______
4. Dibuja sobre la figura 1.16 un segmento de línea mediante el cual se pueda trasladar el cuadrado amarillo hasta obtener el cuadrado anaranjado.
   a) ¿Se trata de un segmento horizontal, vertical o diagonal? ______
5. Cualquiera de los tres cuadrados de la figura 1.16 se puede desplazar hasta superponerlo en cualquier otro, entonces:
   a) ¿Podemos concluir que los tres tienen la misma forma y el mismo tamaño? Expliquen su respuesta.

      ______

   b) ¿Cuál es el área y el perímetro de cada uno de ellos?

      ______
6. ¿Cuál es el área de los triángulos verde y azul de la figura 1.16? ¿Tienen ambos el mismo perímetro? Expliquen su respuesta.

   ______

   ______

7. En la figura 1.16 el triángulo verde tiene un ángulo recto (90°).
   a) ¿El triángulo azul también debe tener un ángulo recto? ¿Por qué?

8. Dibujen en la figura 1.16 el triángulo que se obtiene al trasladar el triángulo azul a lo largo del segmento AB.
   a) Indiquen en el triángulo que dibujaron los ángulos que son iguales a los ángulos del triángulo azul.
   b) ¿Cómo son las longitudes de los lados correspondientes? Expliquen su respuesta.

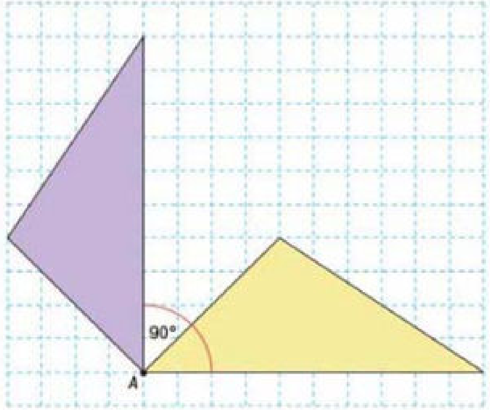


Figura 1.17

Para *rotar* una figura alrededor de un punto en el plano es necesario indicar la dirección de la rotación (a favor o en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y su magnitud, es decir, los grados que se rotará la figura.

Por ejemplo, en la figura 1.17 el triángulo morado se debe rotar 90° alrededor del punto A, en la misma dirección que las manecillas del reloj, para superponerlo al triángulo amarillo.

¿En qué posición quedaría el triángulo amarillo si lo rotamos 45° en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj? Dibújalo en tu cuaderno y compara tu dibujo con el de tus compañeros, ¿son iguales?

Aplícalo

Analiza la figura 1.18 y a partir de ella responde las preguntas. Para realizar esta actividad necesitarás regla y transportador.

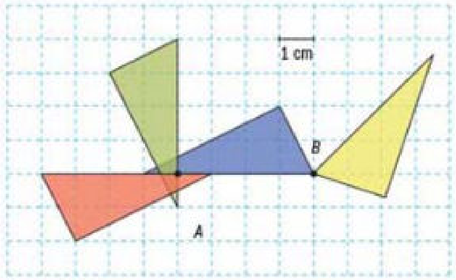


Figura 1.18

1. En la figura 1.18, ¿alrededor de qué punto se debe rotar 180° el triángulo rojo para obtener el triángulo azul? ____________
2. ¿Cómo se debe rotar el triángulo azul para obtener el triángulo verde? ____________
3. Dibuja en tu cuaderno el triángulo que resulta de rotar 90° el triángulo rojo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del punto A. ¿En qué sentido y respecto de qué punto debe rotarse 270° el triángulo que dibujaste para obtener el triángulo azul?

4. ¿Cómo se debe rotar el triángulo amarillo para obtener el triángulo azul?
5. ¿Cuánto mide el área del triángulo azul? ____________
6. ¿Puedes saber cuál es el área de cualquiera de los triángulos de la figura 1.18 si sólo conoces el área del triángulo azul? Escribe tu razonamiento.
7. El ángulo con vértice en *B* del triángulo amarillo es igual a uno de los ángulos del triángulo verde.
   a) Indica en la figura a cuál de ellos.
   b) ¿Los dos ángulos restantes del triángulo amarillo también son iguales a los correspondientes del triángulo verde? Explica tu razonamiento.
8. En general, ¿qué ocurre con los ángulos de un triángulo que se rota?

Reflejar una figura respecto de una línea recta en el plano significa hacer una copia de la figura de tal modo que al doblar imaginariamente el plano a lo largo de dicha línea ambas figuras se superponen (figura 1.19).

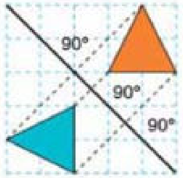


Figura 1.19

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen la figura 1.20 y respondan las preguntas.

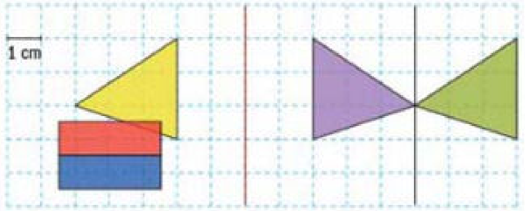


Figura 1.20

1. Cuando reflejamos el triángulo amarillo con respecto a la línea roja, ¿con cuál figura se superpone?
2. ¿Qué triángulo se obtiene si reflejamos el triángulo morado con respecto a la línea negra?

3. ¿Las áreas de los triángulos amarillo, morado y verde son iguales? Expliquen su razonamiento.

4. ¿Los ángulos internos del triángulo morado son iguales a los tres ángulos internos del triángulo verde? Expliquen su razonamiento.

5. ¿Qué se puede decir de los ángulos internos de los triángulos amarillo y verde? Expliquen su razonamiento.

6. ¿Las longitudes de los lados de los tres triángulos son iguales? Expliquen su razonamiento.

Cierre

Glosario

Finito. *Que tiene fin, término, límite.*

Si a una figura geométrica en el plano, por ejemplo un triángulo, un cuadrado o un rectángulo, lo trasladamos, lo rotamos, lo reflejamos o le aplicamos cualquier número **finito** de estas operaciones, obtenemos una figura con la misma forma y el mismo tamaño.

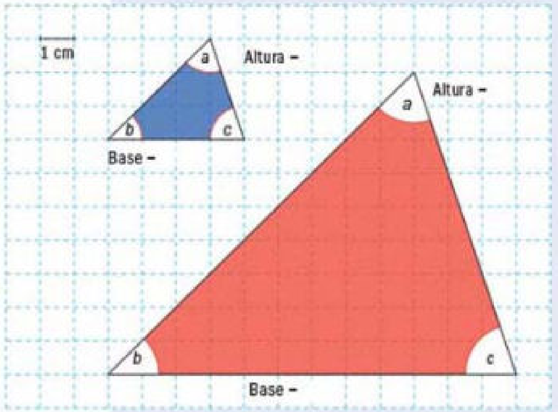


Figura 1.21

Decimos que dos figuras son *congruentes* si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Cuando dos figuras geométricas son congruentes hay una relación entre la medida de sus lados, de tal forma que los lados correspondientes miden lo mismo y los ángulos comprendidos entre dos de ellos son iguales.

Los triángulos de la figura 1.21, ¿tienen el mismo tamaño? ¿Son congruentes?

Los triángulos rojo y azul no tienen el mismo tamaño, pero sí la misma forma. Los ángulos internos del triángulo azul son iguales a los del triángulo rojo.

Decimos que dos figuras de diferente tamaño son *semejantes* si tienen la misma forma.

Taller de matemáticas

Analicen los triángulos de la figura 1.22 y en equipos de tres integrantes respondan las preguntas.

1. Describan una rotación que superponga al triángulo rojo en el triángulo verde.

2. Indiquen los lados y los ángulos que sean iguales en los triángulos verde y rojo.

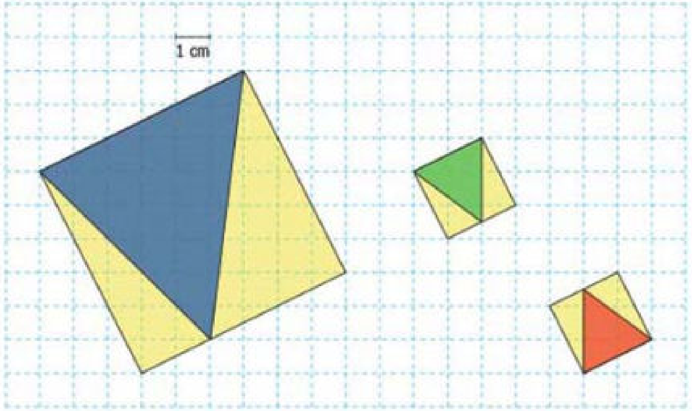


Figura 1.22

3. Comparen los ángulos internos del triángulo azul con los del triángulo verde. ¿Cómo son?

4. ¿Cuáles triángulos son congruentes y cuáles son semejantes? Expliquen su razonamiento.

5. ¿Cuántas veces es más grande el triángulo azul que el rojo? Expliquen su razonamiento.

6. Dibujen en su cuaderno un triángulo que sea dos veces más grande que el triángulo verde.

7. Dibujen en su cuaderno una figura que sea 1.5 veces más grande que la figura 1.23. Dibujen la misma figura, pero rotada 45° respecto del centro de la circunferencia gris en el sentido de las manecillas del reloj.

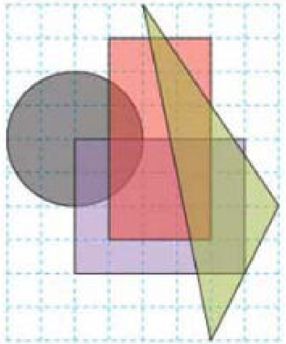


Figura 1.23

Comparen sus dibujos y procedimientos con los de sus compañeros. ¿Cuántas formas de resolver el problema encontraron?

Congruencia y semejanza de triángulos

Introducción

A lo largo de la historia el ser humano se ha enfrentado a situaciones en las que ha sido necesario calcular distancias sin poder medirlas, un ejemplo de ello es el siguiente.

Eratóstenes (276-194 a.n.e.), un escritor, astrónomo y poeta de la antigua Grecia, determinó el tamaño de la Tierra utilizando el siguiente planteamiento: en el *solsticio de verano*, al mediodía, los rayos del Sol caen en forma vertical hacia la Tierra, especialmente en la antigua Siena (hoy Asuán, Sudán). Eratóstenes se dio cuenta de que exactamente en el mismo momento, pero en Alejandría, Egipto (a 800 km al noroeste de Siena), la luz solar formaba un *ángulo* con la vertical de 7.2°, y concluyó que como el Sol estaba muy lejos, entonces todos los rayos de luz **incidían** *paralelos* sobre la Tierra; de tal modo que si los rayos del Sol inciden directamente en Siena, pero en Alejandría hacen un ángulo con la vertical, ese ángulo es igual al que formarían las verticales de las dos ciudades si las prolongáramos hasta el centro de la Tierra (figura 1.24).

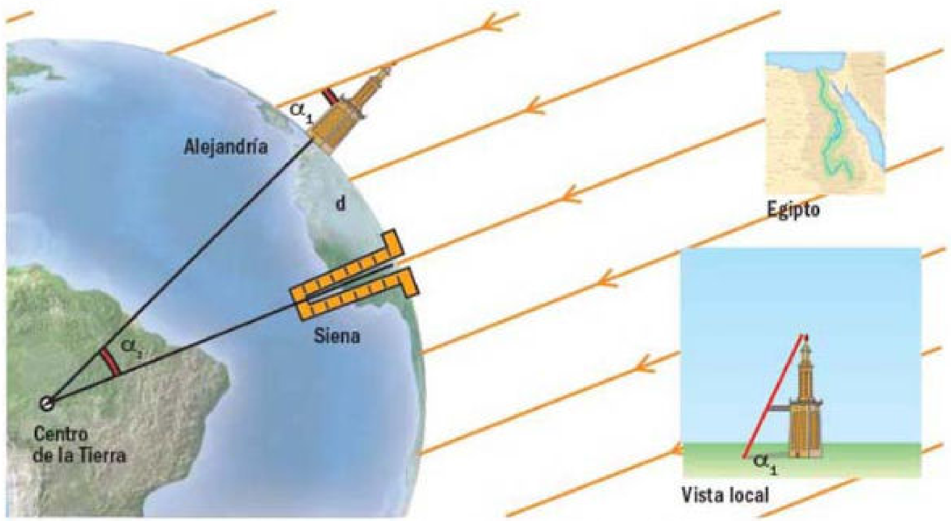
Glosario

Incidir. Caer sobre algo o alguien.

La distancia de Alejandría a Siena era de unos 5 250 estadios (un estadio es una medida antigua que equivale aproximadamente 157.5 m), y el ángulo $\alpha = 7.2°$ es la quincuagésima parte $\left(\frac{1}{50}\right)$ de un círculo completo (360°), por lo tanto, la distancia entre Alejandría y Siena debe estar en la misma *proporción* a la circunferencia total de la Tierra, es decir, debe ser 50 veces 5 250 estadios, o 250 000 estadios. La medida que obtuvo varía muy poco de la medición actual, es decir, que el error que tuvo en su resultado fue muy pequeño.

¿Qué principio de la geometría utilizó Eratóstenes para llegar a tal afirmación referente a la medida de los ángulos?

Si la distancia estaba en la misma proporción, ¿cómo llegó Eratóstenes a ese razonamiento?



Tomado y adaptado de: De Régules, Sergio, *El método de Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra.*

Figura 1.24 Esquema que representa la idea de Eratóstenes para medir el diámetro de la Tierra.

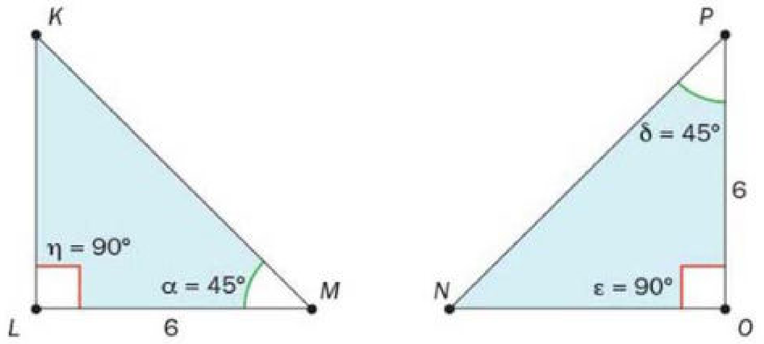
Así como Eratóstenes calculó una distancia sin medirla directamente, utilizarás los *criterios de semejanza y congruencia* de triángulos, a partir del análisis de pares de triángulos, para resolver distintas situaciones.

Criterios de congruencia de triángulos

Criterio ALA

Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos elementos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes:

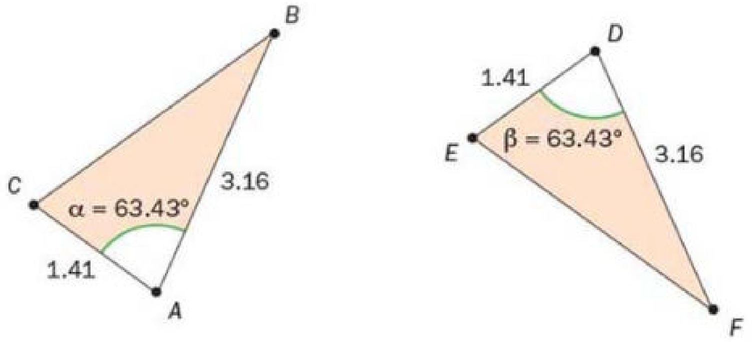
$\triangle KLM \cong \triangle NOP$



Criterio LAL

Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos elementos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes:

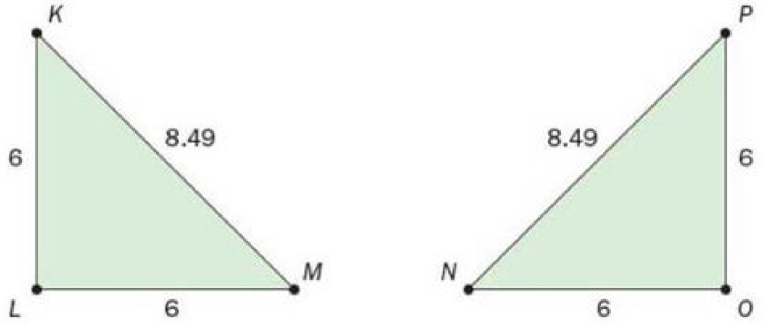
$\triangle CAB \cong \triangle EDF$



Criterio LLL

Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los del otro, entonces los triángulos son congruentes:

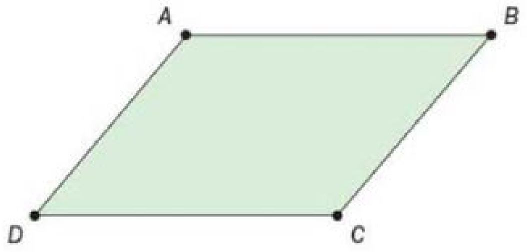
$\triangle KLM \cong \triangle NOP$



Aplícalo

Lleva a cabo la siguiente actividad para verificar que manejas adecuadamente los criterios de congruencia de triángulos. Necesitarás regla, escuadras y transportador.

1. En el paralelogramo *ABCD* traza la diagonal *AC*. Se sabe que el triángulo *ABC* y el triángulo *ADC* que se forman comparten un lado común. A partir del dibujo resultante responde las preguntas.



a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo *ABC* y del triángulo *ADC*? ____________________

b) ¿Cuál es el área del triángulo *ADC* y del triángulo *ABC*?

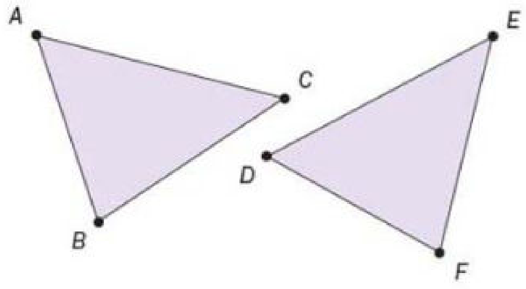
____

c) ¿Los triángulos formados son congruentes? Explica tu respuesta. ____________________

____

2. A partir de las siguientes parejas de triángulos, responde las preguntas.

Pareja 1



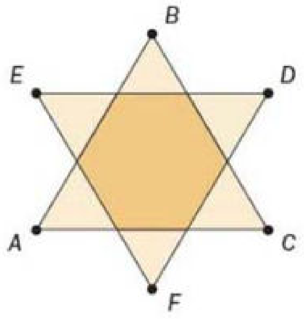
a) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de los triángulos *ABC* y *DEF*? ____________________

b) ¿Los triángulos *ABC* y *DEF* son congruentes? Explica tu respuesta ____________________

____

c) Marca con un mismo color las parejas de lados y ángulos que miden lo mismo.

Pareja 2



a) En la estrella de 6 picos se ven 2 triángulos que forman un hexágono regular. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos y los lados de los triángulos *ABC* y *DEF*?

____

____

b) ¿Los triángulos *ABC* y *DEF* son congruentes o semejantes? Justifica tu respuesta ____________________

____

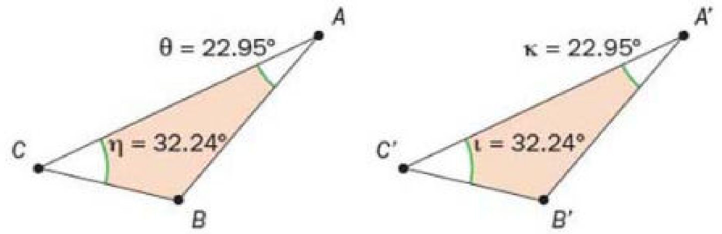
Finalmente, compara con tus compañeros los procedimientos que siguieron, y si son diferentes intercambien ideas para resolver la actividad. Verifiquen sus resultados con su docente.

Criterios de semejanza de triángulos

Criterio AA

Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.

$\triangle CAB \sim \triangle C'A'B'$

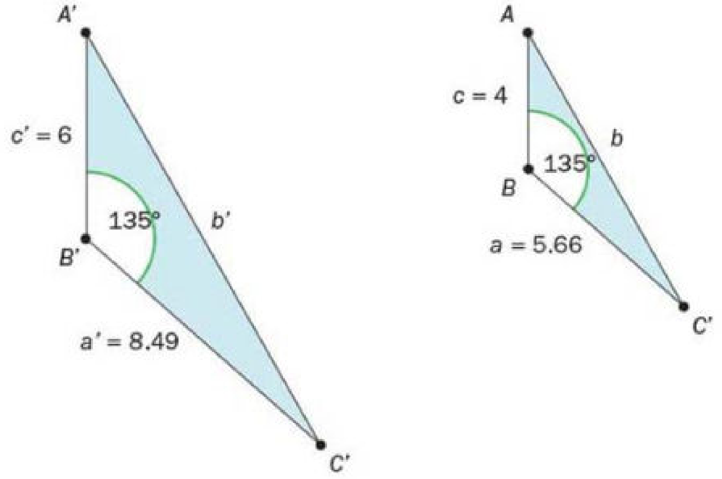


$\measuredangle A = \measuredangle A'; \measuredangle B = \measuredangle B'$

Criterio LAL

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales a sus correspondientes en otro triángulo.

$\triangle CBA \sim \triangle C'B'A'$

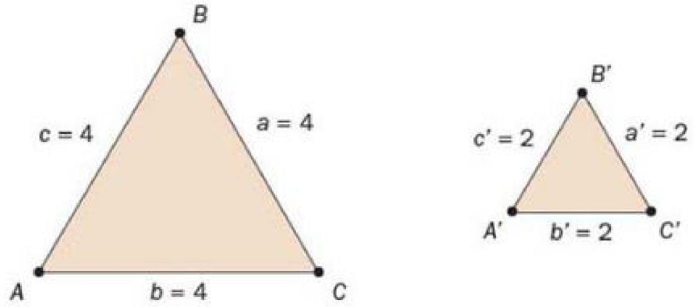


$\measuredangle B = \measuredangle B'; \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$

Criterio LLL

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los lados proporcionales.

$\triangle CAB \sim \triangle C'A'B'$

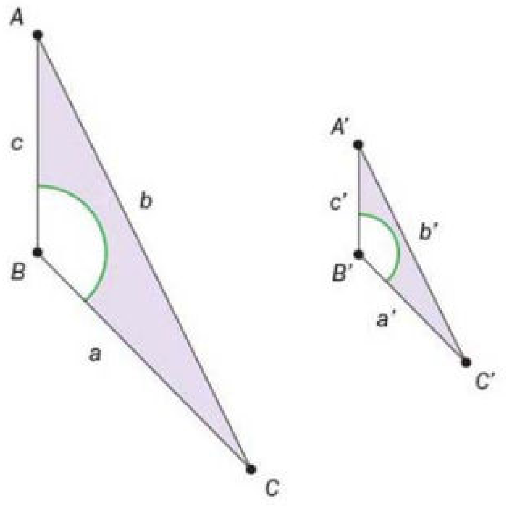


$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$

Construye tu conocimiento

Realiza la siguiente actividad para verificar que manejas adecuadamente los criterios de semejanza de triángulos. Necesitarás regla, escuadras y transportador.

1. Analiza las siguientes parejas de triángulos y responde:



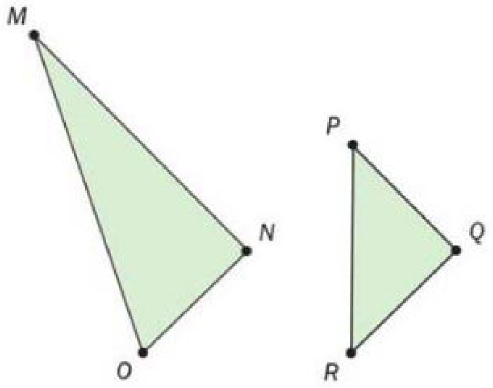
Pareja 1

a) ¿Cuánto miden los ángulos correspondientes *B* y *B'*?

b) ¿Cuánto miden los lados *a*, *a'*, *c* y *c'*?

c) ¿Hay alguna relación entre la medida de los lados correspondientes? ¿Cuál?

d) ¿Son semejantes estos triángulos? Explica tu respuesta.



Pareja 2

a) ¿Los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales? Explica tu respuesta.

b) ¿Son semejantes o congruentes estos triángulos? Explica tu respuesta.

c) ¿Existe alguna relación entre la proporcionalidad de los lados y la semejanza de los triángulos? ¿Cuál?

2. En general, ¿se puede decir que la medida de los ángulos de dos triángulos determina su semejanza o congruencia? Explica tu respuesta.

Finalmente, compara con tus compañeros los procedimientos que siguieron, y si son diferentes intercambien ideas para resolver la actividad. Verifiquen sus resultados con su docente.

Criterios de semejanza y congruencia para polígonos

Para que dos figuras geométricas sean congruentes deben tener la misma forma y el mismo tamaño. Si sólo tienen la misma forma, entonces son semejantes, y sus ángulos *homólogos* (correspondientes) deben tener la misma medida (figura 1.25).

Figura 1.25

En la figura 1.25 los paralelogramos *A* y *D* son congruentes, pues tienen la misma forma y el mismo tamaño. Las figuras *B* y *D*, en cambio, sólo son semejantes entre sí y a las demás, porque su tamaño es distinto.

Aplícalo

Desarrolla la siguiente actividad para aplicar los criterios de semejanza y congruencia en paralelogramos.

1. Analiza los ángulos que son congruentes en las distintas posiciones de las siguientes figuras (figura 1.26).
   a) ¿El cuadrado que se forma en las figuras (A) y (B) es congruente para ambas? Explica tu respuesta.

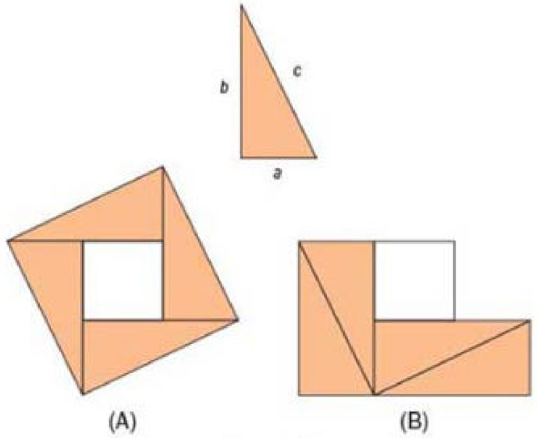


Figura 1.26

2. En la figura 1.27 se han superpuesto dos cuadrados congruentes para formar un octágono regular.
   a) ¿Los triángulos que se forman son congruentes? Explica tu respuesta.

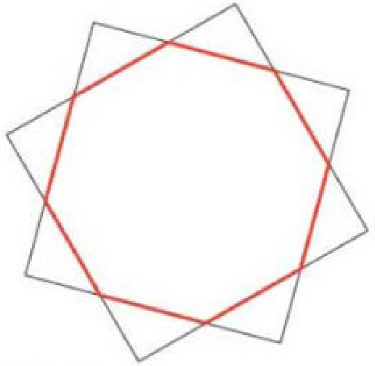


Figura 1.27

Compara con tus compañeros los criterios que aplicaron. Verifiquen sus resultados con su docente.

Aplicación de la semejanza de triángulos

Construye tu conocimiento

En parejas, comenten las siguientes preguntas y respóndalas en su cuaderno escribiendo sus argumentos para verificar que saben aplicar los criterios de congruencia y semejanza.

1. ¿Se pueden establecer criterios de congruencia y semejanza para cuadriláteros?
2. ¿Se puede construir un paralelogramo que tenga la misma área que un triángulo rectángulo y que tenga un ángulo de la misma medida que uno de los ángulos del triángulo?

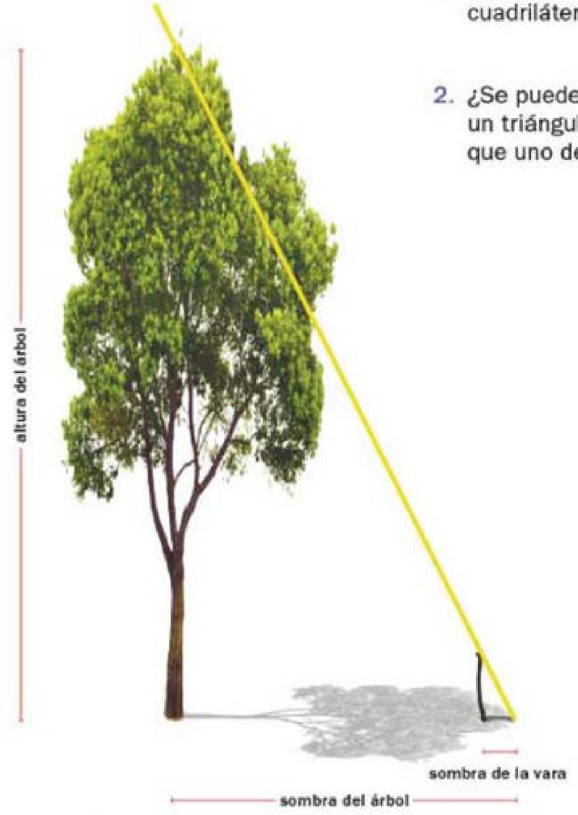


Figura 1.28

Resuelvan el siguiente problema de aplicación en su cuaderno.

1. A cierta hora del día un árbol proyecta una sombra de 5 m sobre el suelo. Si a la misma hora una vara de 1 m de altura proyecta una sombra de 0.5 m (figura 1.28), ¿qué altura tiene el árbol?
   a) ¿Qué tipo de triángulos se forman con las sombras, la vara y el árbol?
   b) Si en lugar de un árbol fuera un edificio, ¿podrías seguir el mismo procedimiento para determinar su altura? Explica tu respuesta.
   c) Si conocieras la altura del árbol y las medidas de las sombras, ¿podrías determinar la altura de la vara? ¿Cómo?

Verifiquen sus resultados con su docente. Analicen las diferentes formas para resolver el problema.

Cierre

Dos triángulos son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, y por lo tanto sus áreas son iguales. Para que dos figuras geométricas cualesquiera sean congruentes, deben tener la misma forma y el mismo tamaño.

Dos figuras son semejantes cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.

Las figuras semejantes tienen la misma medida en sus ángulos interiores y las medidas de sus lados son proporcionales entre sí, pero sus áreas son distintas.

Si un paralelogramo se divide por alguna de sus diagonales, se forman figuras congruentes. Cualquier figura regular se puede dividir en triángulos semejantes.

Taller de matemáticas

En equipos, determinen si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. En los recuadros justifiquen sus respuestas utilizando los criterios de congruencia y semejanza que correspondan, y hagan los dibujos que apoyen sus argumentos.

Los triángulos congruentes siempre son semejantes.

Los triángulos semejantes siempre son congruentes.

Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Todos los triángulos isósceles son congruentes.

No existe diferencia entre los criterios de semejanza y de congruencia de triángulos.

Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

Verifiquen con su docente sus respuestas y argumentos.

Proporcionalidad y funciones: representación gráfica, tabular y algebraica

Introducción

Para graficar una ecuación es necesario contar con un sistema de referencia en el que puedan localizarse las coordenadas de algunos puntos que cumplan dicha ecuación. El sistema más utilizado para graficar ecuaciones es el *plano cartesiano*, que debe su nombre al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien hizo representaciones de figuras geométricas por medio de un sistema de coordenadas.

Recuerda que el plano cartesiano está formado por dos ejes perpendiculares que lo dividen en cuatro *cuadrantes*, los cuales se numeran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (con números romanos) y se cortan en un punto denominado *origen del plano* (figura 1.29).

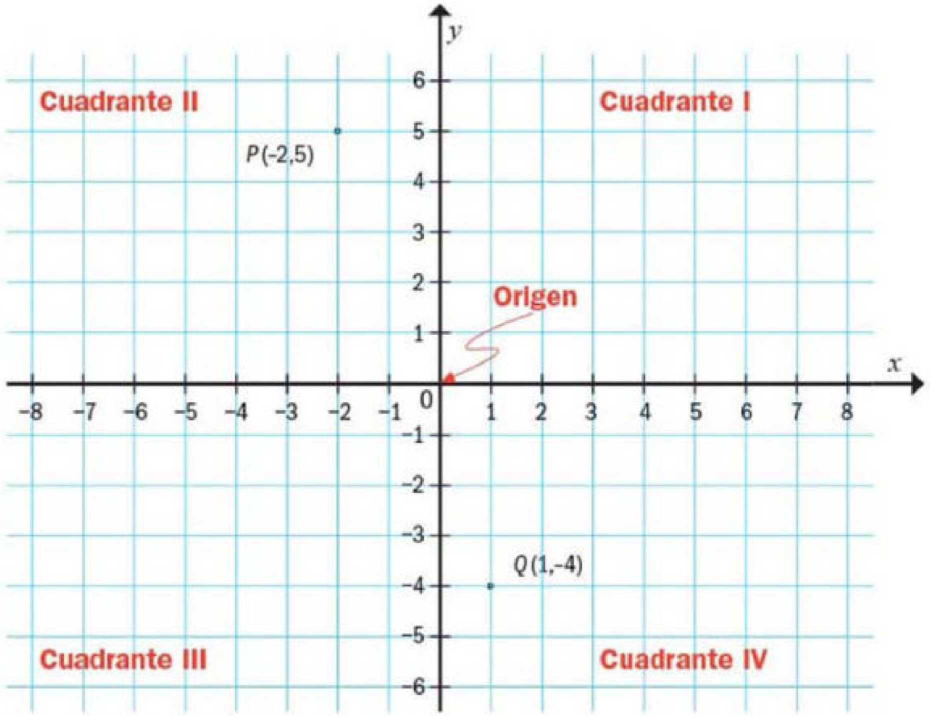


Figura 1.29 Plano cartesiano.

Para un punto de *coordenadas cartesianas* o *rectangulares* (x, y), la coordenada "x" se localiza sobre el eje horizontal (o de las *abscisas*); los valores positivos de las abscisas se sitúan hacia la derecha del eje, a partir del origen, mientras que los negativos, hacia la izquierda del eje. La coordenada "y" del punto se localiza sobre el eje vertical (o de las *ordenadas*); en este caso, los valores positivos de las ordenadas se ubican en la parte superior del eje a partir del origen, mientras que los negativos, en la parte inferior del eje.

Aplícalo

Analiza y resuelve las siguientes situaciones de forma individual.

1. En tu curso de Matemáticas II aprendiste que una recta es la representación gráfica de cierto tipo de ecuaciones. ¿A qué tipo de ecuaciones corresponden las gráficas de la figura 1.30? ______

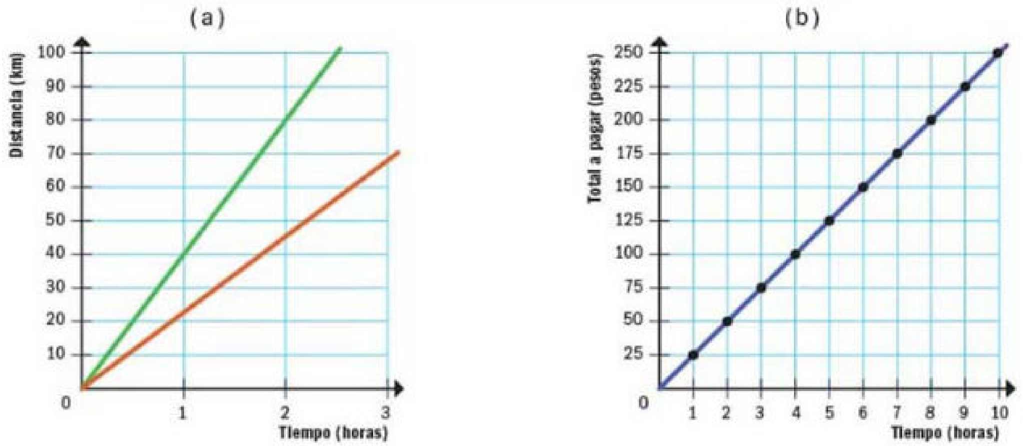


Figura 1.30

2. Si analizas la gráfica (b) de la figura 1.30 notarás que hay dos variables: el tiempo medido en horas y el total a pagar en pesos. Si la gráfica representara la tarifa de un estacionamiento:

   a) ¿Cuánto tendríamos que pagar por una hora? ______

   b) ¿Cuál sería el costo por utilizar el estacionamiento durante 10 horas? ______

3. Con base en la gráfica (b) de la figura 1.30 completa la tabla y responde las preguntas.

   a) En los valores que calculaste para completar la tabla 4, ¿existe alguna relación numérica entre las dos variables? ¿Cuál es? ______

   b) ¿Es proporcional el aumento en el costo de la tarifa del estacionamiento respecto de las horas que se utiliza? Explica tu respuesta. ______

   c) ¿Cuál es la ecuación que representa la relación entre las dos variables de la tabla 4? ______

Tabla 4

Tiempo (horas)	Total a pagar (pesos)
1	25
2	
3	
4	
5	
6	150
7	
8	
9	
10	

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente; si es necesario hagan correcciones.

Muchos profesionistas utilizan gráficas para mostrar los resultados que obtienen al relacionar distintas variables. Por ejemplo, los ingenieros civiles (especializados en construcción) calculan la resistencia y la deformación de un material cuando está sometido a una *fuerza*, y representan estas relaciones mediante una gráfica (figura 1.31). Este tipo de estudios es fundamental para calcular cuánto peso puede sostener un edificio y elegir los materiales que deben usarse en su construcción.

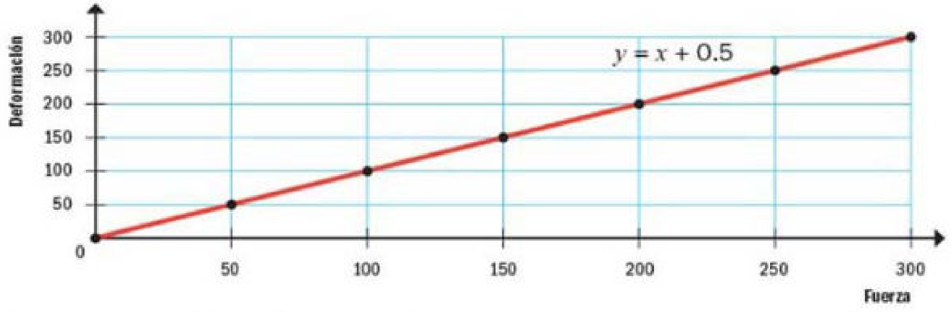


Figura 1.31 Deformación de un material debido a la fuerza aplicada.

Construye tu conocimiento

A continuación resolverás situaciones en las que tendrás que determinar si existe una relación de proporcionalidad entre las variables involucradas.

1. Vanessa prepara pasteles para venderlos en un supermercado, como ella es la responsable del departamento de panadería debe etiquetar cada pastel con el peso en kilogramos y el precio de venta. En la tabla 5 se anotan los datos de algunas de las etiquetas de acuerdo a los pedidos que tienen, y en la figura 1.32 se muestra la gráfica correspondiente.

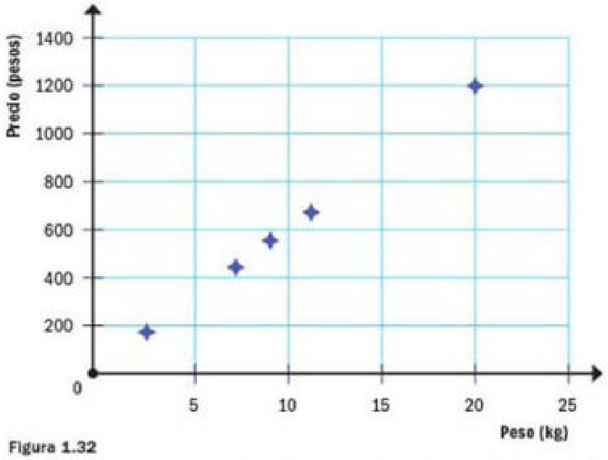


Figura 1.32

Tabla 5

Peso del pastel (kg)	Precio de venta (en pesos)
3	180
7	420
9	540
11	660
20	1200

Con base en la información anterior, responde:

a) ¿Cuánto se debe cobrar por un pastel de 5 kg? ______

b) Si un pastel costó \$260.00, ¿cuánto pesó? ______

c) De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad que relaciona las dos variables (costo del pastel y su peso)? ______

d) ¿Cuál es la ecuación que usa Vanessa para calcular el precio que debe cobrar?

2. En la gráfica de la figura 1.33 se muestran los sueldos que una empresa paga a una secretaria y tres vendedores de categorías C1, C2 y C3.

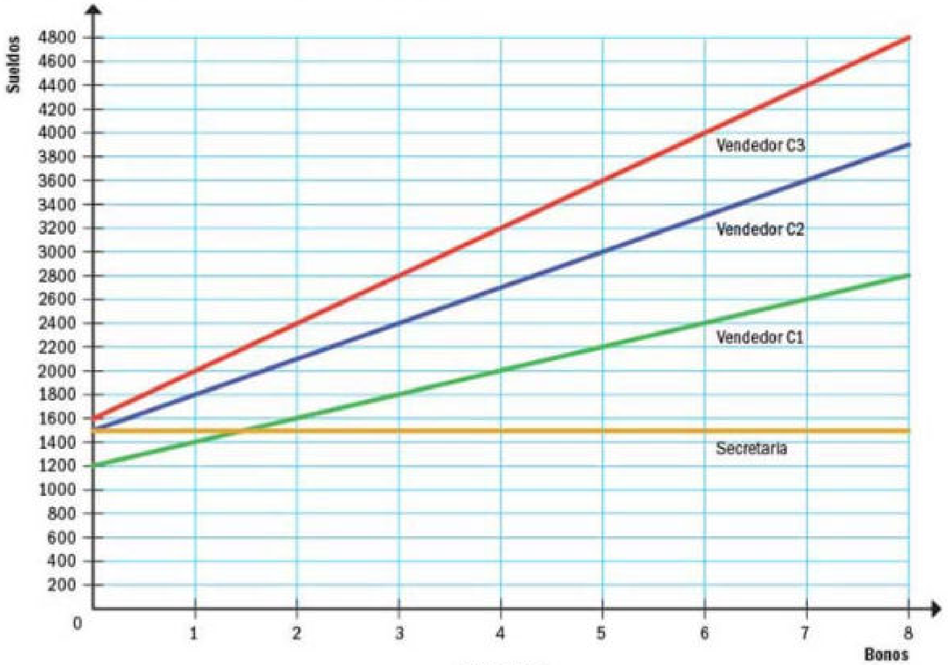


Figura 1.33

A partir de la información anterior, responde:

a) ¿Cuánto gana la secretaria? ______

b) ¿Cuánto gana el vendedor C1 si recibe dos bonos? ______

c) ¿Cuánto aumenta el sueldo del vendedor C2 con cada bono? ______

d) Si en un mes el vendedor C3 ganó cinco bonos, ¿cuánto ganó en total ese mes?

______

e) ¿A cuál de los vendedores le corresponde la función $y = 1600 + 400x$? Explica tu respuesta. ______

f) Anota la función que describe cuánto ganan cada uno de los vendedores y la secretaria.

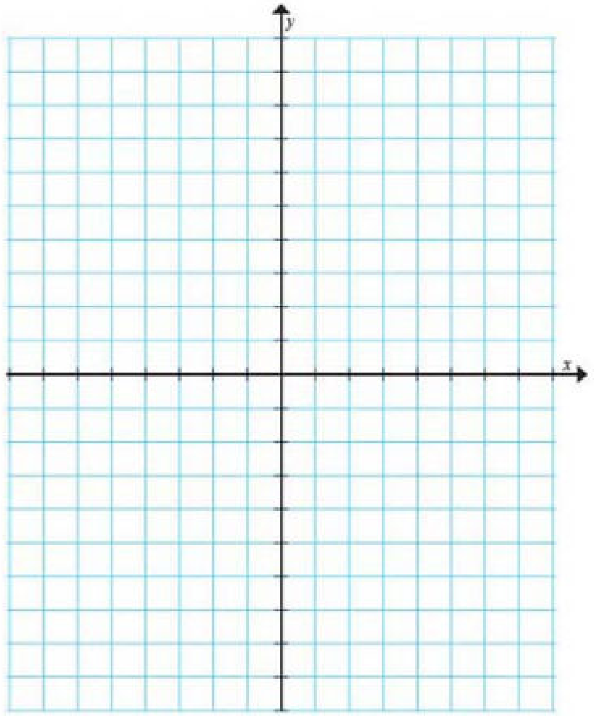
Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente; si es necesario hagan correcciones.

Las *funciones lineales* se representan mediante ecuaciones lineales de la forma $y = ax + b$, denominada *ecuación pendiente-ordenada al origen*, donde a representa la constante de proporcionalidad (pendiente) y b representa la ordenada al origen, es decir, la distancia del origen al punto donde cruza la recta al eje y.

Aplícalo

A continuación resolverás situaciones que están representadas por la ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen.

1. Jorge y Mariana se acaban de casar y están decidiendo qué compañía telefónica van a contratar para su nueva casa. Después de visitar cuatro compañías han expresado la tarifa de servicio en una función que se muestra en el siguiente cuadro.



Compañía	Función tarifaria
América	$y = 100 + 1.2x$
Ladamex	$y = 3x$
Comunicaciones electrónicas	$y = 125 + 1.5x$
Teléfonos internacionales	$y = 90 + 2x$

A partir de la información anterior, responde:

a) Grafica las funciones tarifarias en el plano cartesiano. La variable y representa el costo del servicio y la variable x el número de llamadas realizadas.

b) Si Jorge y Mariana sólo hicieran 100 llamadas o menos, ¿cuál compañía les conviene contratar?

c) De acuerdo con tu gráfica, ¿qué compañía es la que ofrece una mejor tarifa? Explica tu respuesta.

Cierre

Las *variables* se clasifican en *dependientes* (y) e *independientes* (x). Las primeras se llaman así porque su valor depende del valor que tome la variable dependiente. Todas las relaciones entre variables se expresan mediante una ecuación. Existen muchas situaciones en las que las variables involucradas se relacionan mediante una ecuación lineal porque existe una *relación de proporcionalidad* entre ellas. A este tipo de relaciones se les denomina *lineales*.

Para comparar dos o más relaciones lineales es útil construir sus gráficas en el mismo plano cartesiano y analizar las similitudes y las diferencias, y obtener la ecuación que representa a cada gráfica. Si la relación entre las variables representadas en el plano cartesiano es lineal, entonces deberá tener asociada la ecuación $y = ax + b$.

Taller de Matemáticas

Formen equipos de cuatro personas. Procuren que los equipos sean distintos a los que han formado anteriormente, así podrán trabajar con todos sus compañeros de clase y aprender nuevas formas de resolver situaciones. Respondan en su cuaderno.

1. Localicen un área de su escuela que esté marcada con cuadros del mismo tamaño, puede ser el patio o la cancha, o pueden trazar los cuadros con un gis (figura 1.34), procurando que sean del mismo tamaño. El área que eligieron funcionará como un plano cartesiano. Fijen un punto como el origen del plano y marquen, al menos, ocho cuadros-unidades para cada eje, después realicen lo siguiente:

   a) Un compañero del equipo recorrerá ocho unidades corriendo. Registren el tiempo que tarda en hacer el recorrido.

   b) Otro compañero caminará la misma distancia que el anterior y los demás registrarán el tiempo que tarda en recorrer la cantidad de cuadros marcados.

   c) Un miembro más del equipo recorrerá la misma distancia dando cinco saltos por cada uno de los cuadros.

   d) El último integrante medirá la distancia recorrida por sus compañeros con una regla o una cinta métrica de 1 m.

Figura 1.34

2. Al finalizar, comenten y decidan cuáles de las situaciones anteriores implican una relación de proporcionalidad; traten de representarla mediante una ecuación lineal.

3. Redacten cinco preguntas en las que utilicen lo que aprendieron en la lección, por ejemplo:

   a) Si Melissa recorre 8 cuadros en n saltos, ¿cuántos saltos dará en 15 cuadros?

   b) Manuel hizo un tiempo de t minutos en recorrer 8 cuadros corriendo, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 12 cuadros?

4. Elaboren las tablas y gráficas que representen las situaciones que plantearon. Después comenten si corresponden a una relación de proporcionalidad y por qué.

Expongan su trabajo ante el grupo, comparen los planteamientos hechos por otros equipos y después elaboren sus conclusiones con ayuda del docente. Si todavía tienen dudas respecto de las relaciones de proporcionalidad, pídanle a su docente que resuelva más ejemplos.

Representaciones tabulares y algebraicas de relaciones de variación cuadrática

Introducción

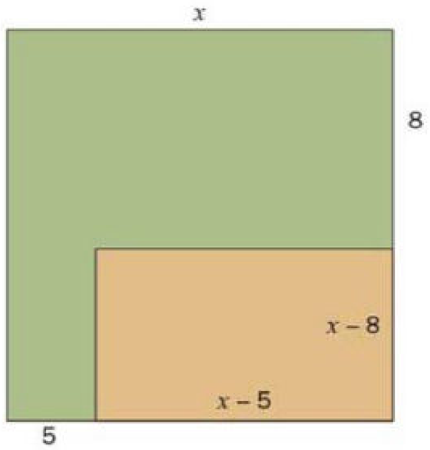


Figura 1.35

En la vida cotidiana, la gente que trabaja en construcción, diseño de muebles o de interiores, confección de ropa y carpintería, entre otras actividades, se enfrenta a problemas cuya solución requiere de un planteamiento matemático. El primer paso para darles solución es conocer los datos con los que se cuenta y saber cómo debe plantearse el problema a partir de los mismos. Un ejemplo de ello es la siguiente situación.

Pedro es carpintero y acaba de comprar un terreno en el que piensa construir su casa y su taller, de modo que el taller se encuentre en la parte trasera de la casa, pero debe tener acceso a él desde la calle y contar con espacio suficiente para que quepan vehículos de carga. Acude a un arquitecto para que le diseñe los planos; él quiere que la superficie de la casa sea rectangular, pero olvidó las dimensiones precisas del terreno y sólo recuerda que es cuadrado. Con esos datos el arquitecto le entrega una propuesta en un dibujo y le pide a Pedro que regrese con las medidas del terreno para confirmar si el diseño es el adecuado. El plano se muestra en la figura 1.35.

1. Con base en los datos del plano responde lo siguiente.
   a) ¿Cuáles son las expresiones para la longitud y la altura de la casa?
   b) ¿Cuál es la medida de cada lado del terreno?
   c) ¿Cuál es la ecuación para calcular el área que ocupará la casa?
   d) ¿Cuánto mediría la superficie de la casa si el largo del terreno fuera de 18 m?
   e) ¿Cuál sería el área del terreno si uno de sus lados midiera 18 m?

2. El arquitecto anotó en el plano, en forma de ecuación, que las medidas ideales para el área de la casa serían $x^2 - 13x + 40 = 108$ (m²).

   ¿Cuál debe ser la medida de los lados del terreno para que se cumpla la ecuación propuesta por el arquitecto?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente, si es necesario hagan correcciones.

En el problema anterior se estableció una *relación cuadrática* para encontrar las áreas del terreno y de la casa. Este tipo de relaciones se puede representar mediante *ecuaciones cuadráticas* o de segundo grado. Por ejemplo:

$$y = ax^2, \quad y = ax^2 + bx, \quad \text{o bien,} \quad y = ax^2 + bx + c$$

donde los valores de los *coeficientes* de la ecuación (a, b y c) dependerán del problema planteado.

Construye tu conocimiento

En forma individual, lleva a cabo las siguientes actividades mediante las cuales verificarás que sabes interpretar situaciones que involucran ecuaciones cuadráticas.

1. Desde la parte más alta de un edificio, que tiene una altura aproximada de 179 m, se deja caer una pelota y se registra el tiempo que tarda en caer (en segundos) y la distancia que recorre mientras cae (en metros).

   En tu curso de Ciencias II estudiaste que la ecuación que se emplea para calcular la distancia recorrida por un objeto en caída libre es:

$$d = \frac{1}{2}gt^2$$

   donde $g = 9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, que corresponde al valor de la aceleración gravitacional terrestre.

   a) Utilizando la ecuación para la distancia, completa los datos que faltan en la tabla.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5
Distancia recorrida por la pelota (m)	0					

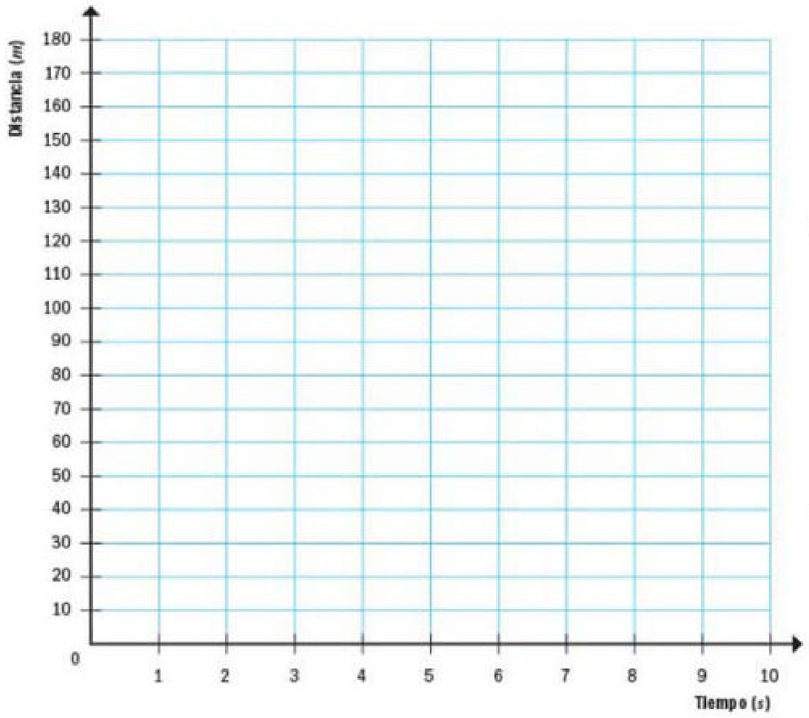
   b) ¿La ecuación para la distancias es una relación cuadrática? ¿Por qué?

c) A partir de la ecuación para la distancia, ¿qué tendrías que hacer con la ecuación para calcular el tiempo que tardará la pelota en caer al suelo? Explica tu procedimiento.

d) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ____________

e) En la ecuación para la distancia, ¿cuál es la variable dependiente y cuál la independiente? Explica tu respuesta.

2. Utiliza los datos de la tabla para graficar la relación entre la distancia y el tiempo.



a) ¿Por qué la gráfica no es una línea recta?

b) De acuerdo con la gráfica, ¿qué ocurre con el valor de la distancia conforme transcurre el tiempo?

c) ¿Cómo interpretas el resultado del inciso anterior, si la pelota está cayendo?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente, si es necesario hagan correcciones.

Una de las aportaciones más importantes de la Física para la medición del tiempo fue la incorporación del péndulo en la construcción de relojes (figura 1.36). Un péndulo consiste en una masa (objeto) suspendida de una cuerda que **oscila** libremente y que tiene la propiedad de que el tiempo entre una oscilación y la siguiente sólo depende de la longitud de la cuerda.

Glosario

Oscilar. *Balancear, efectuar movimientos de vaivén.*

Aplícalo

Analiza la siguiente situación y responde.

Un relojero necesita saber cuál es la longitud de la cuerda que sostiene el péndulo de un reloj (figura 1.37) que no mide el tiempo adecuadamente, pero no tiene el reloj. Sólo sabe que el periodo del péndulo es de 3 s y que la ecuación para calcular la longitud del péndulo es: $L = \frac{g}{2\pi} T^2$

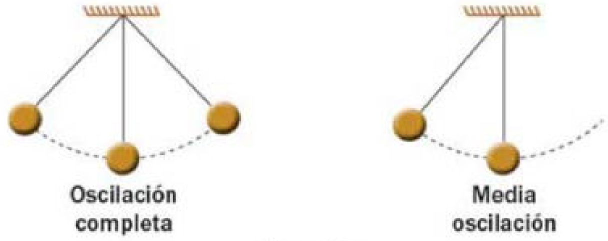


Figura 1.37

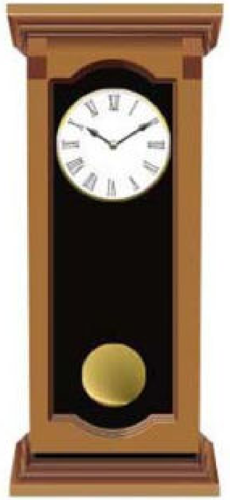


Figura 1.36 Reloj de péndulo.

donde L representa la longitud de la cuerda, T es el periodo del péndulo y la aceleración de la gravedad terrestre es $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1. En la ecuación para la longitud, ¿cuál es la variable dependiente y cuál la independiente? Explica tu respuesta.

a) Explica por qué la ecuación para la longitud del péndulo es una relación cuadrática.

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que relaciona la longitud y el tiempo?

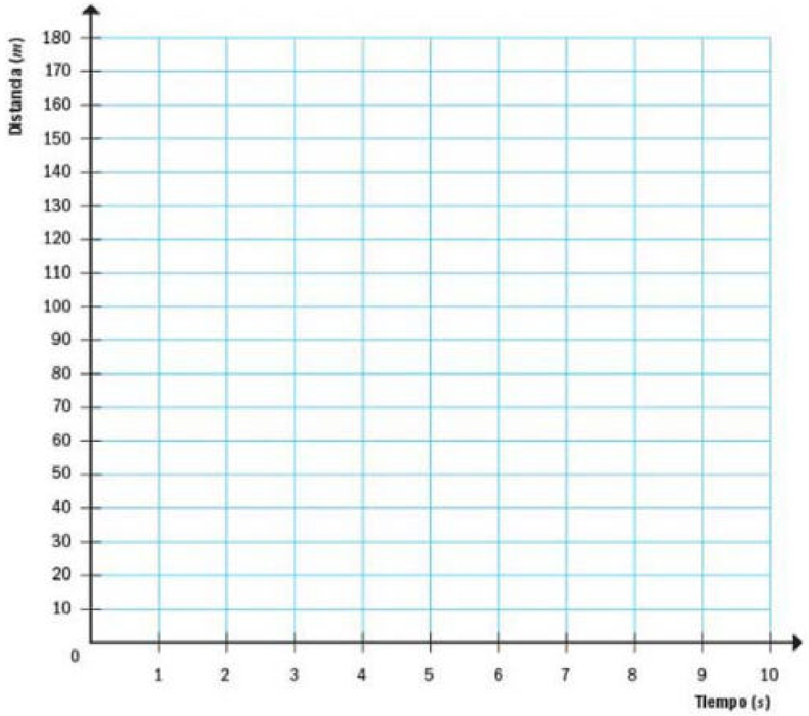
c) ¿Cuál es la longitud de la cuerda del péndulo? Escribe tu procedimiento.

2. Aplicando la ecuación para la longitud del péndulo, completa la siguiente tabla.

T (s)	0	1	2	3	4	5	6
L (m)							

a) ¿Cuál debe ser la longitud del péndulo para que funcione correctamente, es decir, para que el periodo sea $T = 1s$? ______

3. Utiliza los datos de la tabla para graficar la relación entre la longitud y el tiempo.



a) ¿Por qué la gráfica no es una línea recta?

______

b) De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es la relación entre la longitud del péndulo y su periodo?

______

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente, si es necesario hagan correcciones.

Hasta ahora has resuelto problemas relacionados con la Física, pero éstos no son los únicos que se pueden resolver aplicando relaciones cuadráticas, también se utilizan en Economía, Arquitectura y Astronomía, entre muchas otras disciplinas; por ejemplo, para describir las ganancias y los costos de las empresas o la disposición de los terrenos que se usan para sembrar, o el cálculo de las trayectorias de las naves espaciales, etcétera.

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen las siguientes situaciones en las que deberán plantear las ecuaciones necesarias para resolverlas.

1. El dueño de un cine cobra $25 por entrada a la función de cada domingo y asisten en promedio 500 personas, aunque el cine tiene mucha mayor capacidad, por lo que piensa que si baja el precio de entrada $1, eso le ayudaría a tener, al menos, 70 asistentes más.

a) ¿A cuánto asciende el ingreso por entradas al cine cuando asisten las 500 personas?

______

b) ¿Cuál sería el ingreso si se baja a $24 el precio de la entrada?

______

Analicen los datos de la siguiente tabla, que indican cuáles son los ingresos del cine dependiendo del descuento que se ofrezca.

Descuento ($)	0	1	2	Función de descuento
Precio ($)	25	25 – 1	25 – 2	$25 - x$
Asistentes	500	500 + (70 × 1)	$500 + (70x^2)$	$500 + 70x$
Ingresos ($)	25 × 500	(25 – 1)(500 + 70 × 1)	$(25 - 2)(500 + 70x^2)$	$(25 - x)(500 + 70x)$

c) ¿Cuál sería el ingreso si se rebajan $5 al precio de la entrada? Anoten el procedimiento que siguieron.

______

d) ¿Cuál es la ecuación que nos permite calcular el ingreso (1) en función del descuento (x) que se aplique?

______

e) ¿Cuál es la variable dependiente en esta relación, el ingreso o el descuento? ¿Por qué?

______

f) La relación entre el descuento que se aplica y el ingreso que se percibe, $1(x)$, ¿es cuadrática? ¿Por qué?

______

g) ¿Cómo es la gráfica que representa la relación entre el ingreso (1) y el descuento (x)?

______

2. Un granjero quiere colocar malla de alambre alrededor de un terreno rectangular que usa para sembrar hortalizas y así evitar que los animales dañen su cultivo. La superficie de su terreno mide 96 m². La figura 1.38 muestra la forma y las dimensiones del terreno.

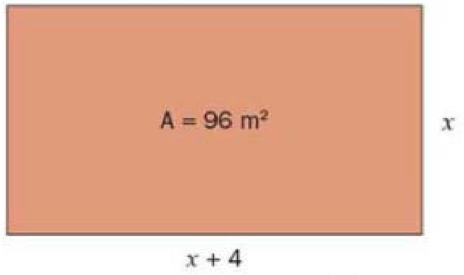


Figura 1.38

a) Escriban la ecuación del área total del terreno en función de sus dimensiones. ______________________

b) ¿Se trata de una relación cuadrática? ¿Por qué?

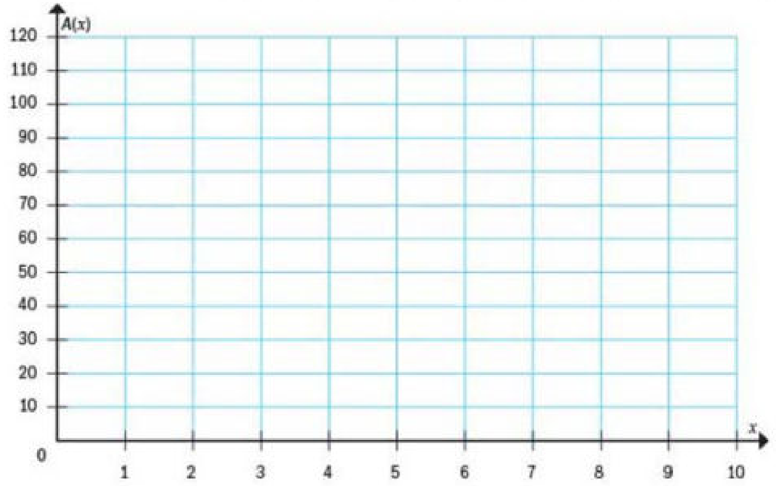
____

____

____

c) Elaboren una tabla asignando disintos valores a x, para que encuentren el valor que cumpla con la condición de que el área total sea 96 m².

d) Dibujen la gráfica que representa la función $A(x)$.



x	$A(x)$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

e) ¿Cuántos metros de malla debe comprar el granjero para cercar su terreno?

____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente, si es necesario hagan correcciones.

Cierre

Las relaciones cuadráticas se expresan mediante ecuaciones cuadráticas de la forma

$$y = ax^2, \quad y = ax^2 + bx, \quad \text{o bien,} \quad y = ax^2 + bx + c$$

Se denominan cuadráticas o de segundo grado porque el mayor exponente del polinomio es 2. Su representación gráfica es una curva denominada parábola (la cual analizaremos a detalle en los siguientes bloques). Estas relaciones se utilizan en distintos ámbitos, como la ciencia, la construcción y el diseño.

Taller de matemáticas

Formen equipos de cuatro personas. Procuren que los equipos sean distintos a los que han formado anteriormente, pues así podrán trabajar con todos sus compañeros de clase y aprender nuevas formas de resolver situaciones. Esta actividad deben realizarla bajo la supervisión de su docente.

1. Ubiquen un lugar de la escuela donde puedan llevar a cabo la actividad. Se requiere un espacio de, al menos, 5 m. Necesitarán una pelota de goma, un cronómetro o un reloj con segundero (para tomar el tiempo), un gis, una cinta métrica o una regla de 1 m de longitud y un cuaderno para hacer sus anotaciones.

   a) Con el gis, marquen en el piso una distancia recta de 5 m; dos integrantes del equipo se colocarán en cada extremo de la recta. Elijan quién de los dos lanzará la pelota al otro.

   b) Deberán hacer, al menos, 10 lanzamientos. El tercer integrante del equipo tomará el tiempo que tarda la pelota en llegar de un extremo al otro. El cuarto integrante anotará los datos en el cuaderno, usando una tabla como la de la derecha.

Lanzamiento	1	2	3
Distancia (d)			
Tiempo (t)			
Velocidad (v)			

   c) Calculen la velocidad de cada lanzamiento mediante la ecuación: $v = \frac{d}{t}$. Anoten los resultados en la tabla. Para obtener un promedio de la velocidad, deben calcular la media o promedio aritmético de todos los lanzamientos.

   - ¿Cuál es la velocidad promedio de los lanzamientos que hicieron? Escriban el procedimiento en su cuaderno.

2. Ahora cada miembro del equipo, por turnos, lanza la pelota hacia arriba lo más alto posible y comienza a registrar el tiempo desde que la pelota inicia la caída, esto les permitirá saber cuál fue la máxima altura de la pelota, considerando el tiempo de descenso. Cada miembro deberá hacer, al menos, dos lanzamientos.

   a) Registren los valores obtenidos en una tabla como la de la derecha (recuerden que las unidades son segundos y metros respectivamente).

Lanzamiento	1	2	3
Distancia (d)			
Altura (d)			

   b) Calculen la altura promedio para todos los lanzamientos mediante la ecuación: $d = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Para obtener un promedio de la altura deben calcular la media o promedio aritmético de todos los lanzamientos.

   - ¿Cuál es la altura promedio de los lanzamientos que hicieron? Escriban el procedimiento en su cuaderno.

3. Con los datos obtenidos, dibujen en su cuaderno las gráficas para cada situación y compárenlas. Expliquen qué tipo de relación representa cada situación.

4. Presenten su trabajo al grupo, comparen los planteamientos realizados por otros equipos y después elaboren sus conclusiones con ayuda de su docente.

Si todavía tienen dudas respecto de las relaciones cuadráticas, pídanle a su docente que juntos resuelvan más ejemplos.

Conocimiento de la escala de la probabilidad

Introducción

Los *juegos de azar* son aquellos cuyos resultados no dependen de las habilidades o de la suerte del jugador, por ejemplo, el lanzamiento de dados.

Figura 1.39 Lanzamiento de dados en un casino.

Muchos jugadores que acuden a ferias y casinos creen que si apuestan más aumentan sus posibilidades de ganar, pero los juegos de azar son *experimentos aleatorios*, por lo que un jugador no puede asegurar el resultado, sino sólo calcular la probabilidad de que ocurra un resultado.

Los experimentos aleatorios son aquellos en los que no siempre se obtienen los mismos resultados.

Los premios para los juegos de azar están determinados por la probabilidad de acertar el resultado. Cuanto menores sean las probabilidades de obtener la combinación correcta, mayor es el premio que asigna la casa de apuestas (casino o feria). Entre los juegos de azar más populares está el lanzamiento de dados (figura 1.39), que consiste en lanzar **simultáneamente** dos dados de seis caras, numeradas del 1 al 6. El jugador apuesta por un número, que deberá ser el resultado de la suma de las caras de los dados que se lanzan.

Glosario

Simultáneo. *Que se hace u ocurre al mismo tiempo que otro evento.*

Organicen una lluvia de ideas dirigida por su docente para comentar y responder las siguientes preguntas.

1. Suponiendo que juegas a los dados (de seis caras), y apuestas al 7 como número ganador:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ganes?
   b) ¿Cómo calcularías esta probabilidad?
2. Si el juego de dados empleara dados de veinte caras, ¿la probabilidad de ganar con un 7 sería menor o mayor que para el lanzamiento de dados de seis caras? ¿Por qué?
3. ¿Has escuchado la expresión "la casa siempre gana"? ¿Qué significa esta frase?

Con ayuda de su docente, anoten sus conclusiones en el cuaderno. Si todavía tienen dudas, pídanle que les dé más ejemplos.

Escala de probabilidad y características de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

La *teoría de la probabilidad* nos permite calcular la probabilidad de los distintos resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, si lanzamos un dado, los resultados que podemos obtener son 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Estos números constituyen el *espacio muestral* para el experimento "lanzar un dado de seis caras".

El espacio muestral (E) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Por lo tanto, el espacio muestral para el experimento "lanzar un dado de seis caras" se escribe de la siguiente manera: E = {1,2,3,4,5,6}

Cuando lanzamos el dado de seis caras, la probabilidad de que salga cualquiera de los seis números es la misma, es decir, es *igualmente probable* que salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En un experimento aleatorio tal vez deseemos saber la probabilidad de que ocurra una situación particular, para ello definimos un *evento*, que denotamos con letras mayúsculas. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras, si queremos saber la probabilidad de que salga el número 5, entonces el evento A es:

A = "que salga cinco"

Para calcular la probabilidad de un evento, P(A), utilizamos la *probabilidad clásica*, es decir, el cociente entre el número de *resultados favorables* y el número de resultados posibles de un experimento.

En el experimento "lanzar un dado de seis caras" sólo tenemos un resultado favorable para el evento A = "que salga cinco", es decir, sólo existe una posibilidad de que caiga la cara con el número 5, y el número de casos posibles es seis (porque el dado tiene seis caras). Entonces, la probabilidad de que ocurra el evento A es:

$$PA = \frac{\text{resultados favorables}}{\text{resultados posibles}} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad se puede representar en fracciones, en porcentaje y/o en número decimal.

En el experimento "lanzar un dado de seis caras" la probabilidad de que salga la cara con el número 1 se puede escribir de cualquiera de las siguientes maneras:

$$P = \frac{1}{6} = 0.1666, \text{ o bien, } P = 0.1666 \times 100 = 16.66\%$$

Para organizar los posibles resultados de un experimento aleatorio se puede utilizar una tabla. Por ejemplo, para el experimento "lanzar dos monedas simultáneamente", los resultados se organizan en la tabla donde A representa el resultado "águila" y S el resultado "sol". Hay cuatro posibles resultados para el experimento "lanzar dos monedas simultáneamente" y el espacio muestral es:

E = {(A,A), (A,S), (S,A), (S,S)}

Moneda 1	Moneda 2	Resultados posibles
A	A	(A,A)
A	S	(A,S)
S	A	(S,A)
S	S	(S,S)

Aplícalo

Analiza los experimentos aleatorios planteados a continuación y responde las preguntas.

1. Si haces el experimento aleatorio "lanzar una moneda":
   a) ¿Cuántos resultados posibles puede haber? ____________
   b) Escribe el espacio muestral. ____________
   c) En el evento A = "cae águila", ¿cuál es la probabilidad que ocurra dicho evento? Escríbela como fracción, como porcentaje y como número decimal.
   ____

2. En equipos de tres compañeros jueguen a los "disparejos", necesitarán tres monedas iguales. El juego consiste en lanzar cada quien una moneda y ver los resultados; por ejemplo, si alguien tiene un águila y los otros dos jugadores tienen sol, gana el que tiene el águila. Repitan el experimento cuatro veces. Pónganse de acuerdo y lancen sus monedas al aire al mismo tiempo. En la siguiente tabla anoten sus resultados, escriban una A para representar el resultado "águila" y una S si el resultado es "sol".

Nombre del jugador	Lanzamiento 1	Lanzamiento 2	Lanzamiento 3	Lanzamiento 4

   a) Escribe el espacio muestral para el experimento.
   ____
   b) ¿Cuántos resultados posibles puede haber? Explica tu respuesta.
   ____
   ____
   c) Explica cómo calcularías la probabilidad de que las tres monedas resulten águila en el mismo lanzamiento.
   ____
   ____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente; si es necesario hagan correcciones.

Cuando no es posible que ocurra un evento determinado en un espacio muestral, se dice que es un *evento imposible*; mientras que cuando estamos completamente seguros de que un evento determinado ocurrirá, se denomina *evento seguro*.

La probabilidad es una medida que se determina en la escala del 0 al 1. La probabilidad para un evento imposible es 0, mientras que la probabilidad de un evento seguro es 1.

En términos porcentuales el 0 es un evento imposible y el 100% un evento seguro. Si P(A) es la probabilidad de ocurrencia de un evento A, entonces: $0 \leq P \leq 1$.

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen los siguientes problemas y respondan las preguntas. Al finalizar, comparen sus respuestas con las de sus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente; si es necesario hagan correcciones.

1. Se lanza una bola dentro de una ruleta giratoria dividida en ocho casillas iguales numeradas del 1 al 8; la bola sólo puede caer dentro de una casilla en cada lanzamiento. Anoten sus respuestas como fracción, como decimal y como porcentaje.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en un número menor que 4? Expliquen cómo lo calcularon. ____________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en un número par? Expliquen cómo lo calcularon. ____________
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en un número mayor que 2? Expliquen cómo lo calcularon. ____________
   d) ¿Cuál será la máxima probabilidad, en porcentaje, de que un evento ocurra? Expliquen su respuesta. ____________
   ____
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en cualquier número? Expliquen cómo lo calcularon. ____________
   ____

Dos eventos se denominan *complementarios* cuando la suma de sus probabilidades es igual a 1. Entonces, si P(A) es la probabilidad de ocurrencia de un evento A, y P(A') la probabilidad de no-ocurrencia de A, se tiene que:

$$0 \leq P \leq 1 \quad y \quad P(A) + P(A') = 1$$

Los *eventos mutuamente excluyentes* son aquellos que no pueden suceder al mismo tiempo porque la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia de los otros. Se llama *evento independiente* a aquel cuya probabilidad de ocurrencia no depende de la ocurrencia de otro evento.

Aplícalo

Responde las siguientes preguntas. Al finalizar, compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen sus resultados con su docente.

Figura 1.40 Ruleta francesa.

1. ¿Cómo se representa la probabilidad de un evento que no puede ocurrir? Explica tu respuesta.
2. En una ruleta francesa los números están distribuidos como se muestra en la figura 1.40. ¿Qué significa que exista un 50% de probabilidad de que un evento ocurra? Explica tu respuesta y escribe un evento relacionado con la ruleta, cuya probabilidad sea del 50%.
3. Escribe la probabilidad, en fracción, de que la bola caiga en un número mayor que 5. ¿Y la probabilidad de que no caiga en un número mayor que 5?
4. ¿Cuál es la suma de las probabilidades del inciso anterior? ¿Son eventos complementarios? Explica tu respuesta.
5. ¿La bola puede caer en una casilla roja y en una negra al mismo tiempo? ¿Por qué?
6. Para el experimento "lanzar un dado de seis caras", ¿cuál es la probabilidad de obtener el 5 y el 6 en el mismo lanzamiento? ¿De qué tipo de eventos se trata?

Cierre

La escala de probabilidad se utiliza para indicar la probabilidad de que un evento ocurra; si el evento es seguro, entonces su probabilidad es 1, o 100%; si el evento es imposible su probabilidad es igual a 0.

Si dos o más eventos de un mismo experimento aleatorio tienen resultados diferentes que pertenecen al mismo espacio muestral, y al juntar todos los resultados de dichos eventos cubren por completo el espacio muestral, entonces los eventos son eventos complementarios.

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir al mismo tiempo. Los eventos independientes no tienen relación entre sí, el resultado de un evento no está condicionado por la ocurrencia de otro.

Taller de matemáticas

En parejas, analicen las siguientes situaciones y completen la tabla.

1. Identifiquen el tipo de evento de que se trata: complementario, mutuamente excluyente o independiente, y justifiquen su elección.

Evento	Categoría	Justificación
En el mismo partido de futbol, el local gana y empata.		
Los Cachorros han obtenido varios triunfos consecutivos en sus partidos de futbol. En el siguiente partido ganarán.		
En su siguiente partido los Cachorros pueden ganar, perder o empatar.		
En el mismo lanzamiento de un dado caen un número par y un número impar.		
Al lanzar un dado cae el 4 en repetidas ocasiones, el siguiente lanzamiento también será un 4.		

2. Redacten dos eventos mutuamente excluyentes y dos eventos complementarios que ocurren en su vida cotidiana, por ejemplo algún juego que realicen, una actividad que desarrollen con sus familias, etcétera, no olviden incluir las características y los conceptos estudiados en esta lección para justificar sus elecciones.

Tipo de evento	Características
Mutuamente excluyente	
Complementario	

3. ¿Qué características hacen que los eventos complementarios sean diferentes de los eventos mutuamente excluyentes?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y verifíquenlas con su docente; si es necesario hagan correcciones.

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio

Introducción

John F. Kennedy, presidente de Estados Unidos de América entre 1961 y 1963, fue el primer candidato a la Casa Blanca que se basó en encuestas para organizar su estrategia de campaña. Comprendió la necesidad de estudiar las opiniones y actitudes del público en general, y partiendo de esta idea utilizó las encuestas para definir los puntos fuertes y los débiles que le atribuía la gente, así como para evaluar tanto a sus oponentes como los temas de actualidad y para definir con precisión la planificación de su campaña. Aunque en 1936 el uso de las encuestas ya había pronosticado que el político y abogado Franklin Delano Roosevelt (1882-1945) sería electo presidente, las encuestas no se emplearon sino hasta 1963 para planificar y organizar, a partir de la información obtenida, una estrategia completa.

Tomado y adaptado de:
www.uovirtual.com.mx/moodle/lecturas/mercaso/19.pdf.
(Consulta: 3 de marzo de 2013).

Figura 1.41 Los encuestadores son las personas encargadas de realizar las encuestas entre el público seleccionado.

En la actualidad las encuestas tienen una aplicación muy amplia (figura 1.41), pues se utilizan tanto en política como en una gran diversidad de campos del mercado económico, particularmente en el diseño de campañas de publicidad para productos y servicios.

Organicen una lluvia de ideas dirigida por su docente para responder las siguientes preguntas.

a) ¿Alguna vez has hecho una encuesta? ¿Con qué propósito?

b) ¿Cómo eliges a las personas a las que encuestas?

c) ¿Sabes cómo organizar, representar e interpretar los datos que obtienes?

Con ayuda de su docente, anoten sus conclusiones en el cuaderno. Si todavía tienen dudas, pídanle que les dé más ejemplos.

La encuesta

Aplícalo

Lee el siguiente informe.

Informe: Consumo de medios en Zacatecas 2013

Con la finalidad de intentar hacer un acercamiento **empírico** al consumo de medios de comunicación en Zacatecas, un equipo de investigación universitario aplicó una encuesta a una *muestra aleatoria* de 400 personas. La prueba se llevó a cabo del 21 de enero al 7 de febrero de 2013. La prueba sólo se aplicó a personas mayores de 18 años que viven en los municipios de Zacatecas y Guadalupe, tomando como base el directorio telefónico de la **zona conurbada**. En el diseño del instrumento de recolección de datos se tomaron en cuenta 21 indicadores, entre los que se encuentran *datos estadísticos* sobre los encuestados (preguntas 1, 2 y 3), tipo de medio que más utilizan para informarse (pregunta 4), número de aparatos de recepción (preguntas 5, 13 y 20), consumo de televisión (preguntas 7 y 9), de radio (14 y 15), y de internet (18 y 21), entre otros.

Glosario

Empírico. *Perteneciente o relativo a la experiencia.*

Zona conurbada. *Es la zona de colonias y/o pueblos que están alrededor de una ciudad.*

Resultados

Del total de la muestra, el 27.50% tiene edades entre los 26 y 35 años, el 19% entre 18 a 25 años, el 18.75% entre 46 a 55 años, el 17.75% entre 36 a 45 años, el 16% más de 56 años y el 1% no respondió sobre su edad. De acuerdo con los resultados, el 28.25% de los encuestados cuentan con un grado escolar de licenciatura, un 25.75% de preparatoria, el 16% de secundaria, el 8.75% tienen estudios técnicos, el 8% de primaria, el 3.25% no tienen ningún estudio concluido y 1.50% respondieron ser normalistas. Únicamente el 0.25% tienen estudios de postgrado y un 8.25% no respondió.

De los resultados obtenidos destacan, entre otros aspectos, qué tipo de medio informativo utilizan las audiencias para conocer su entorno. El 42.25% de la muestra afirmó que su principal fuente de información proviene de la televisión, y en segundo lugar se ubicó internet, con el 36.25%. El uso de radio para fines informativos alcanza el 11% y supera al uso de periódicos impresos, que se ubicó en el 7.5%, el 3% respondió que ninguno. (figura 1.42).

Tomado y adaptado de:
www.etcetera.com.mx/articulo.php?articulo=17470
(Consulta: 28 de febrero de 2013).

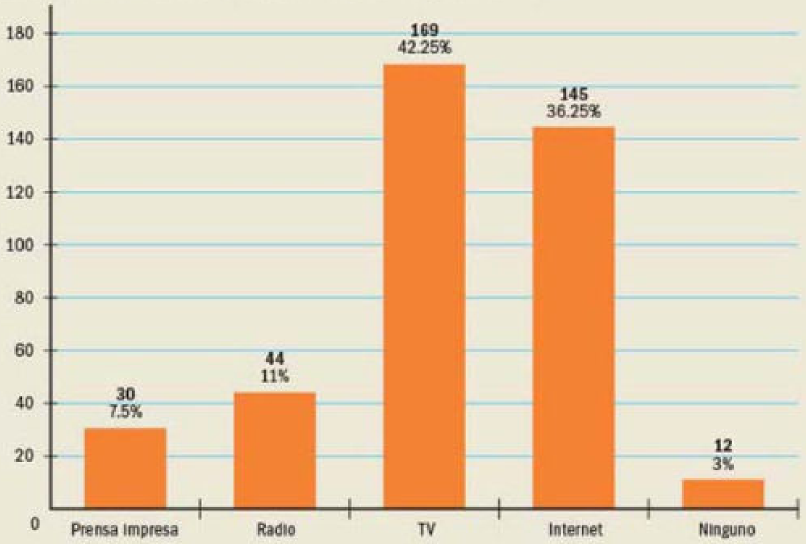


Figura 1.42 Resultados de la encuesta. Preferencia de medios de comunicación que utilizan las personas encuestadas para obtener información.

1. Tras haber leído el reporte de investigación, contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál fue el propósito de la encuesta?

   b) ¿A quién se le aplicó esta encuesta?

   c) ¿Por qué crees que se eligió a este grupo de personas y no a otro?

   d) ¿Dónde y cómo se publicaron los resultados de la encuesta?

   e) ¿Cómo pueden aprovechar los resultados los medios de comunicación de Zacatecas para mejorar los productos que ofrecen?

Compara y comenta tus respuestas con las de tus compañeros, y si son diferentes intercambien ideas para resolver la actividad.

Una *encuesta* es un estudio para recabar información mediante un cuestionario prediseñado, con el objetivo de conocer opiniones, características o situaciones concretas.

Identificación de la población en estudio. Formas de elegir el muestreo

Para conocer y analizar las características de una población o muestra se lleva a cabo un *estudio estadístico*. La encuesta es uno de los principales instrumentos para realizar un estudio de este tipo. Para planear el diseño de una encuesta se requiere tener definido el propósito de la misma y la utilidad de la información que se recabará.

Lo primero que se debe plantear para decidir el objetivo de la encuesta y desarrollar las preguntas del cuestionario es:

- Tema de la encuesta.
- Objetivo.
- Aspectos específicos que interesa conocer.
- A quién se encuestará.
- A cuántas personas se quiere encuestar.
- Cuántas preguntas se quiere formular.
- Diseño del cuestionario: preguntas abiertas, de opción múltiple o de escala.

La *población* está conformada por todos los individuos de los cuales queremos obtener información. Una *muestra representativa* es un subconjunto de la población que nos permite representarla, porque reúne todas sus características sin que se pierda la exactitud de los datos que queremos recabar.

Cuando se lleva a cabo una encuesta a toda la población, el estudio se denomina *censo*, como los que realiza el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), mientras que si sólo se encuesta a una *muestra representativa*, se llama *muestreo*. Para seleccionar una muestra es necesario que se observen características comunes de toda la población; se sugiere hacerlo de forma aleatoria para al menos el 10% de la población.

Para diseñar el cuestionario se pueden redactar preguntas de respuesta abierta o cerrada. En las preguntas de respuesta abierta el encuestado expresa su opinión sobre el tema; mientras que en las de respuesta cerrada se plantea la pregunta y se dan múltiples opciones de respuesta, de las cuales el encuestado tiene que seleccionar al menos una. Las preguntas de respuesta cerrada facilitan la recolección y organización de los datos.

Es importante que antes de diseñar su encuesta establezcan los procedimientos que utilizarán para recolectar los datos, así como el tiempo que dedicarán a esta actividad. Después del trabajo de campo (realización de la encuesta) deberán elegir de qué manera presentarán la información; pueden utilizar tablas de frecuencias y representaciones gráficas, la elección dependerá del tipo y la cantidad de los datos recolectados.

TIC a tu alcance

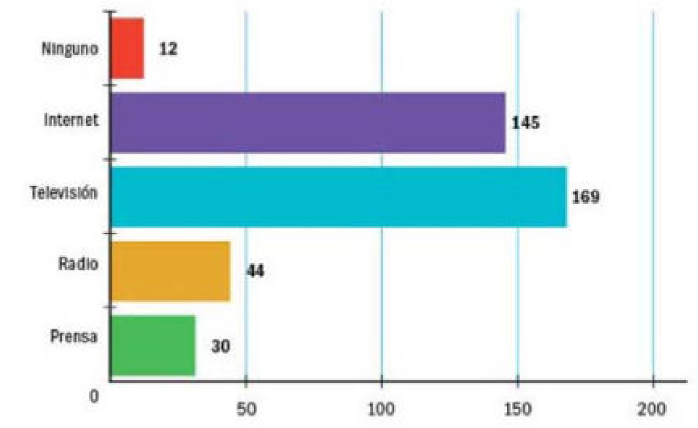
El INEGI realiza diversos censos y muestreos que reflejan la situación social y económica de nuestro país, entre otros aspectos. Te sugerimos consultar su página de Internet para que conozcas los estudios que lleva a cabo:
www.inegi.org.mx

Recolección de datos de una muestra y selección de herramientas para su presentación

Existen distintos tipos de gráficas con las que se puede representar la información, tales como:

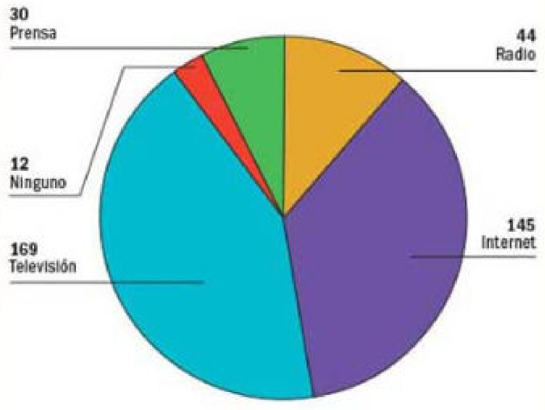
Gráfica de barras

Se utiliza para presentar y comparar distintos valores de una categoría determinada.



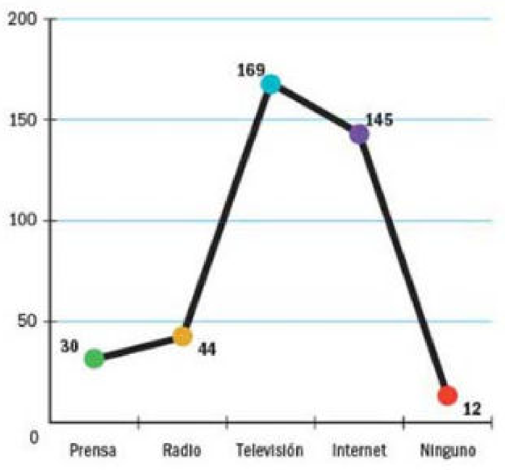
Gráfica circular

Muestra cómo se distribuyen los datos de la población o muestra en las fracciones que forman el total.



Gráfica de línea o poligonal

Se emplea para presentar las tendencias de la población o muestra y su variación en el tiempo.



¿Cuál de los gráficos anteriores utilizarías para dar a conocer los resultados de tu encuesta?

Si el estudio se realiza en el ámbito de la investigación científica para comprobar una idea previa o hipótesis en circunstancias controladas sobre el tema de estudio, entonces estamos hablando de un *experimento estadístico*.

Cierre

Las fases del diseño de una encuesta son las siguientes:

- Definir el objeto de la encuesta, precisando el tema y los objetivos que se persiguen.
- Elección de la muestra. Es necesario seleccionar un subconjunto de la población que contenga características comunes a todo el universo de estudio para que sea representativa.
- Recolección de datos. Se precisa el tiempo y el espacio donde se realizará el trabajo de campo; asimismo, se plantean los cuestionamientos para recolectar la información necesaria que permita obtener lo que se busca, posterior a ello se encuesta directamente a la muestra y se registran sus respuestas.
- Presentar la información. Primeramente se procesan los datos, se determina la estructura que mejor represente lo que se quiere decir, definiendo las herramientas convenientes para hacerlo (tablas y gráficas, entre otros), y por último se elaboran las conclusiones o el informe.

Un experimento se diferencia de una encuesta porque el primero pretende manipular su contexto, mientras que en las encuestas sólo se busca obtener datos, sin querer influir en él, pero se pueden utilizar los resultados de la encuesta para realizar experimentos.

Taller de matemáticas

En parejas, realicen un estudio estadístico para comprobar la veracidad de la siguiente hipótesis:

- La estatura promedio de los varones de 3° de secundaria de nuestra escuela es de 1.68 m, y la de las mujeres es de 1.57 m.

Para desarrollar su estudio estadístico pueden apoyarse en el siguiente esquema.

- Nombre del experimento
- Hipótesis
- Población
- Muestra
- Preguntas de investigación
- Proceso de recolección de datos
- Herramientas para presentar los resultados
- Informe o conclusiones del trabajo

1. ¿Pueden utilizar la encuesta como instrumento para recolectar datos en un experimento estadístico? Expliquen su respuesta.

Apliquen la siguiente encuesta entre sus compañeros de clase.

1. De los siguientes medios de comunicación, ¿cuál es el que más utilizas?

   a) Radio b) Televisión c) Internet d) Periódico impreso e) Ninguno

2. De los siguientes medios de comunicación, ¿cuál es tu preferido?

   a) Radio b) Televisión c) Internet d) Periódico impreso e) Ninguno

3. ¿Cuánto tiempo diario consumes en promedio de cada uno de los siguientes medios de comunicación?

Radio	a) menos de 1 h	b) de 1 a 2 h	c) 3 h	d) 4 h o más
Televisión	a) menos de 1 h	b) de 1 a 2 h	c) 3 h	d) 4 h o más
Internet	a) menos de 1 h	b) de 1 a 2 h	c) 3 h	d) 4 h o más
Periódico impreso	a) menos de 1 h	b) de 1 a 2 h	c) 3 h	d) 4 h o más

Completen la siguiente tabla con los datos obtenidos. Anoten el número máximo de alumnos que respondieron a cada pregunta.

Medio de comunicación	Más utilizado	Mayor preferencia	Tiempo diario consumido en promedio
Radio			
Internet			
Televisión			
Periódico impreso			

1. ¿Cómo darían a conocer los resultados de estas preguntas?

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros, y si son diferentes intercambien ideas para resolver la actividad.

Glosario

Veracidad. De algo que se dice es verdadero.

TIC a tu alcance

Puedes buscar plantillas gratuitas de encuestas en Internet o en libros de estadística en la biblioteca de tu comunidad o de tu escuela.

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

Figura 1.43 Pirámide de Keops, Egipto.

La proporción áurea

En 1840 el general británico sir Richard William Howard Vyse (1784-1853), arqueólogo y egiptólogo, midió el ángulo en la base del *triángulo meridiano* de la gran pirámide de Keops, en Egipto (figura 1.43), y obtuvo que su medida es de 51° 50', es decir que el semitriángulo central de la gran pirámide es semejante al triángulo áureo. El triángulo áureo se forma al unir un vértice de un pentágono regular con el vértice opuesto (figuras 1.44 y 1.45).

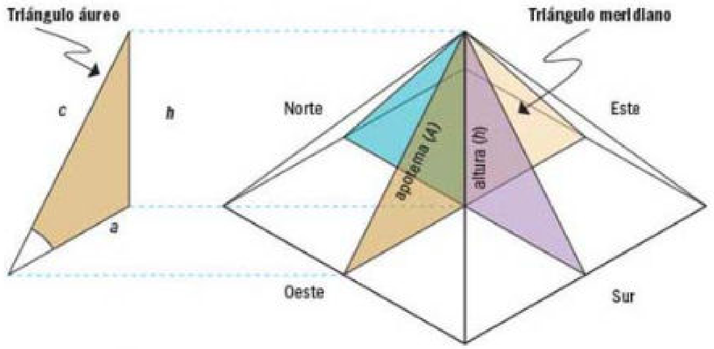


Figura 1.44 Triángulo meridiano de la pirámide de Keops.

Por su parte, el astrónomo escocés Piazzi-Smyth (1819-1900) encontró la aproximación de 148.208 m para la altura de la gran pirámide, y de 232.805 m para el lado de la base. Si dividimos la altura de la cara entre la mitad de la base de la pirámide, tomando dos aproximaciones para esta última, tenemos que:

$$\frac{148.2}{116.5} = 1.273; \qquad \frac{148.2}{116.4} = 1.272$$

Número áureo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

que aproximadamente es: 1.618034

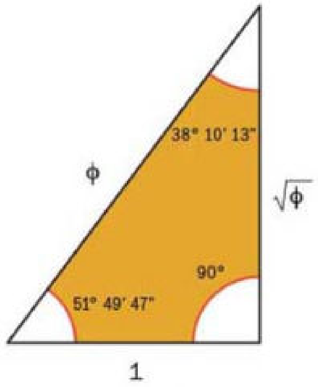


Figura 1.45 Triángulo áureo.

Estos resultados han permitido encontrar relaciones en la construcción de la gran pirámide. Si llamamos *h* a la altura de la gran pirámide, 2*a* al lado de la base y *c* a la hipotenusa del triángulo meridiano formado por *a* y *h*:

$$\frac{c}{h} = \frac{h}{a} = \sqrt{\phi}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{4}{\pi}; \quad \frac{a}{h} = \frac{\pi}{4}$$

Comprueba esta igualdad realizando la división $\frac{4}{\pi}$ advierte que los resultados son aproximados.

Lo que implica que: $8a = 2\phi$

Como consecuencia se obtiene que el cociente entre el área de la base ($4a^2$) y el área de la sección meridiana (*ha*) de la gran pirámide es precisamente π. Igualmente, es posible suponer que el perímetro de la base (4*a*) es precisamente el perímetro de una circunferencia de radio *h*.

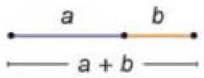
El abad Moreux, autor de *La science mysteriuse des Pharaons*, que fue partidario de la tesis π, escribió: "Herodoto relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidas para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares" (Bonell, Carmen, *La divina proporción, Las formas geométricas*, Ediciones UPC, Barcelona, 1994, pp. 21-25).

Traduciendo esto a lenguaje matemático se obtiene la hipótesis áurea; es decir, que está en relación con el número áureo (ϕ).

El número áureo surge de la división en dos de un segmento, conservando las siguientes proporciones:

La longitud total *a* + *b* es al segmento más largo *a*, como *a* es al segmento más corto *b*. El rectángulo áureo (figura 1.46) es un ejemplo de dicha representación, pues al quitar un tanto del rectángulo al cuadrado, queda un rectángulo de las mismas dimensiones.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$



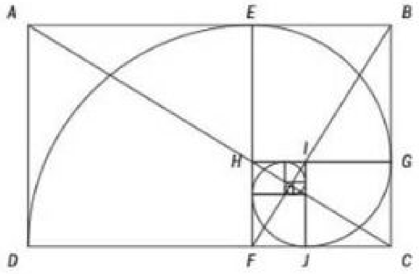


Figura 1.46 Rectángulo áureo.

El número áureo es un número irracional (decimal infinito no periódico) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto como relación o proporción entre dos segmentos de una recta.

Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etcétera (figura 1.47).

También se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea o proporción divina. A lo largo de la historia se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y en las artes (figura 1.48).

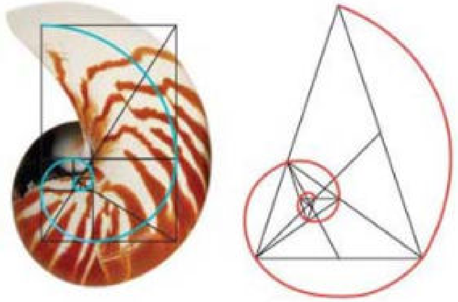


Figura 1.47 Proporción divina en la Naturaleza.

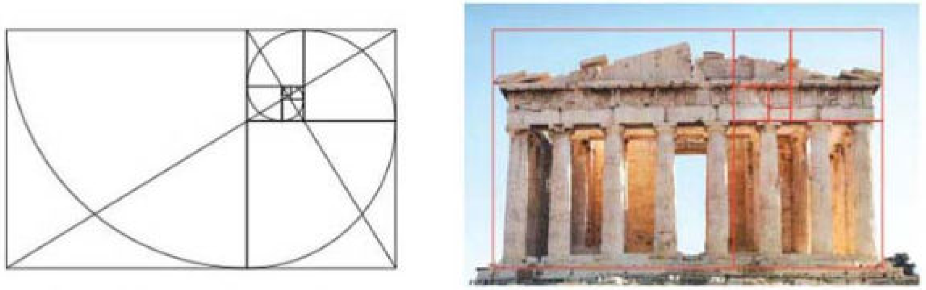


Figura 1.48 Proporción divina en la arquitectura. El Partenón, Atenas, Grecia.

EVALUACIÓN TIPO PISA

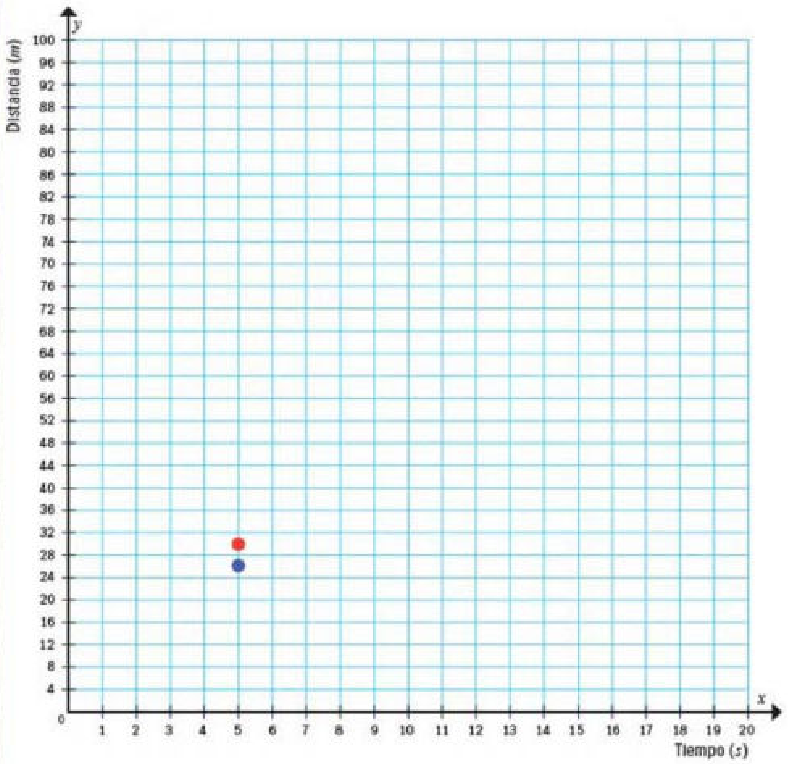
Lee y analiza las siguientes situaciones para responder las preguntas.

Carrera de 100 metros

En la secundaria "20 de Noviembre" los alumnos de tercer grado se están preparando para una carrera de 100 metros planos; en la última preselección destacaron Ixchel y Ernesto como finalistas, Ixchel corre a una velocidad de $6\frac{m}{s}$ y Ernesto ha alcanzado una velocidad de $5\frac{m}{s}$.

1. Con la información anterior completa la siguiente tabla y representa en el plano cartesiano la relación entre la distancia recorrida por cada participante y el tiempo en el que hacen el recorrido; después responde las preguntas.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Distancia (m) Ixchel	0					30															
Distancia (m) Ernesto	0					25															



a) ¿Cuánto tiempo tardará Ixchel en llegar a la meta?

b) ¿Cuánto tiempo tardará Ernesto en llegar a la meta?

c) ¿Cuál es la ecuación que representa el recorrido de Ixchel?

d) ¿Cuál es la ecuación que representa el recorrido de Ernesto?

e) ¿De qué tipo es la función que representa el recorrido de ambos competidores?

f) ¿Quién será el ganador de la carrera si conservan los valores en sus velocidades?

g) ¿De cuántos metros es la ventaja entre el corredor que va en primer lugar y el otro corredor, en el segundo 12?

Midiendo un terreno

2. Don Juan tiene un agostadero de forma triangular, y justo en medio del terreno hay un montículo de peñascos y un estanque de agua que comparte con su vecino (figura 1.49); él quiere determinar las medidas de su terreno porque en su plano sólo aparecen las medidas de dos de sus lados, y se le hace difícil medirlo de manera directa. Examina con cuidado el plano y sus anotaciones, después haz lo necesario para encontrar la medida faltante.

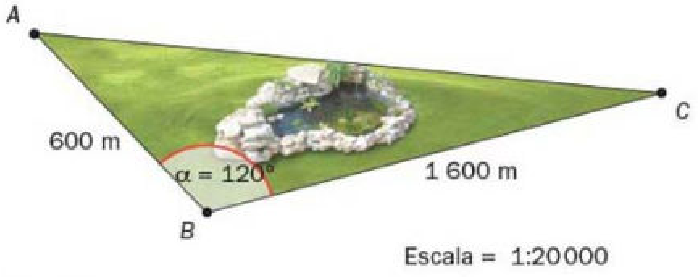


Figura 1.49

a) ¿Cuál es la medida del lado faltante que no puede medirse de manera directa? ¿Por qué?

b) Don Juan dice que sin conocer la medida de ese lado faltante puede saber cuánto mide la superficie del terreno, e indica que es de 480 000 m^2. ¿Es verdad lo que dice? Compruébalo.

c) ¿Qué significado tiene la escala en una situación como esta?

d) Explica el procedimiento que seguiste para determinar las medidas del terreno.

e) Escribe dos criterios que indiquen que hay semejanza entre la forma y las medidas del plano y las del terreno original.

EVALUACIÓN TIPO ENLACE

Subraya la opción correcta para cada reactivo.

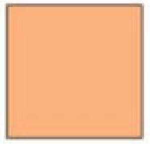
1. Se tiene un cuadrado cuyo lado mide $x - 3$. ¿De las siguientes ecuaciones, cuál es la que está representando su área?

   a) $x^2 - 6x + 9$

   b) $x^2 + 6x + 9$

   c) $x^2 + 6x - 9$

   d) $x^2 - 3x + 9$



$x - 3$

2. De las siguientes opciones señala la que indica dos condiciones para que un par de figuras sean semejantes:

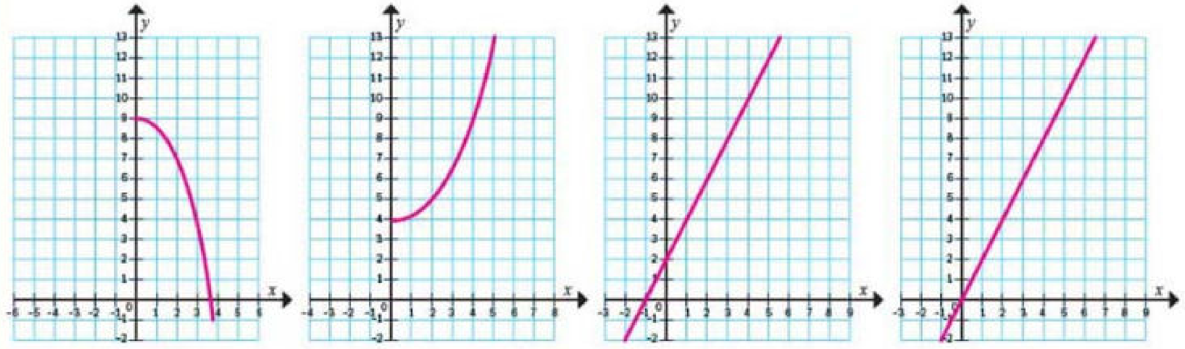
   a) Ángulos correspondientes iguales y lados paralelos.

   b) Proporción entre sus lados y factor de escala.

   c) Lados correspondientes proporcionales y ángulos correspondientes de igual medida.

   d) Igual medida de sus lados e igual medida de ángulos correspondientes.

3. ¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas corresponde a un cultivo de células que crece de forma cuadrática?



a) b) c) d)

4. Un terreno rectangular tiene 640 m² de superficie, si su ancho mide 6 m menos que su largo, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular la medida x de su largo?

   a) $x^2 + 6x = 640$

   b) $x^2 - 6x - 640 = 0$

   c) $x^2 + 6x + 640 = 0$

   d) $x^2 - 6x = 640$

5. A cierta hora del día, una persona de 1.65 m de estatura proyecta una sombra de 1.90 m, ¿cuál es la opción que representa la altura de un árbol cercano cuya sombra es de 4 m?

   a) 3.47 m

   b) 0.78 m

   c) 3.90 m

   d) 3.74 m

EVALUAR PARA APRENDER

Completa la siguiente tabla; para ello, reflexiona sobre cada indicador y decide cómo es tu desempeño.

Aspectos a evaluar	¿Qué hice para lograrlo?	¿A qué dificultades me enfrenté?
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas a través de diversos procedimientos.		
Represento a través de tablas y funciones algebraicas situaciones de diversas disciplina en las que está presente una variación cuadrática.		
Analizo y comparo diversas figuras geométricas y puedo explicar los criterios para determinar si hay congruencia entre ellas.		
Utilizo mis conocimientos acerca de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver situaciones en las que es necesario poner en práctica sus propiedades.		
Reconozco y puedo explicar las características de eventos mutuamente excluyentes e independientes en situaciones en las que se aplica una escala de probabilidad.		
Diseño, analizo y presento los resultados de encuestas o experimentos partiendo del muestreo de una población de estudio.		

Valora tus actitudes para el trabajo en equipo. Responde en tu cuaderno.

a) ¿Cómo fue mi participación durante las actividades colaborativas?

b) ¿Qué actitudes y valores puse en práctica al emitir opiniones y escuchar las de mis compañeros?

c) Solicita a tu docente que escriba algunas sugerencias para ayudarte a lograr los aprendizajes esperados y a mejorar tus actitudes en el trabajo en equipo, así como tu tolerancia e inclusión de tus compañeros en las actividades escolares.

d) Solicita a uno de tus padres o a tu tutor que lea tu autoevaluación y los comentarios de tu docente. Pide que te escriba algunas recomendaciones para mejorar tu proceso de aprendizaje. Asimismo, si es necesario, que escriba algún comentario para tu docente.

B2

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

EJES	TEMAS
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. • Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. **Medida** • Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
Manejo de la información	**Nociones de probabilidad** • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Puerta de Europa I y II, Madrid, España.

Los arquitectos tienen la posibilidad de imaginar y construir diseños fabulosos, para ello se valen de muchas técnicas y conocimientos matemáticos, como se ve en la Puerta de Europa, en Madrid, España.

¿En qué se parecen y en qué son diferentes ambas torres? ¿Qué tipo de patrones y regularidades presenta la fotografía?

El obelisco que se ve al frente, ¿es más alto que las torres? ¿Cómo puedes saberlo?

¿QUÉ TANTO SABES?

Esta sección está diseñada para que reconozcas lo que has aprendido en tus cursos anteriores de Matemáticas, y que ahora utilizarás para comprender los temas de este bloque.

1. Construye las torres de la Puerta de Europa con su vista frontal y la parte del edificio faltante para completar la imagen.
   a) Supón que en la base se encuentra un lago que refleja su imagen (figura 2.1), ¿cómo se vería? ______

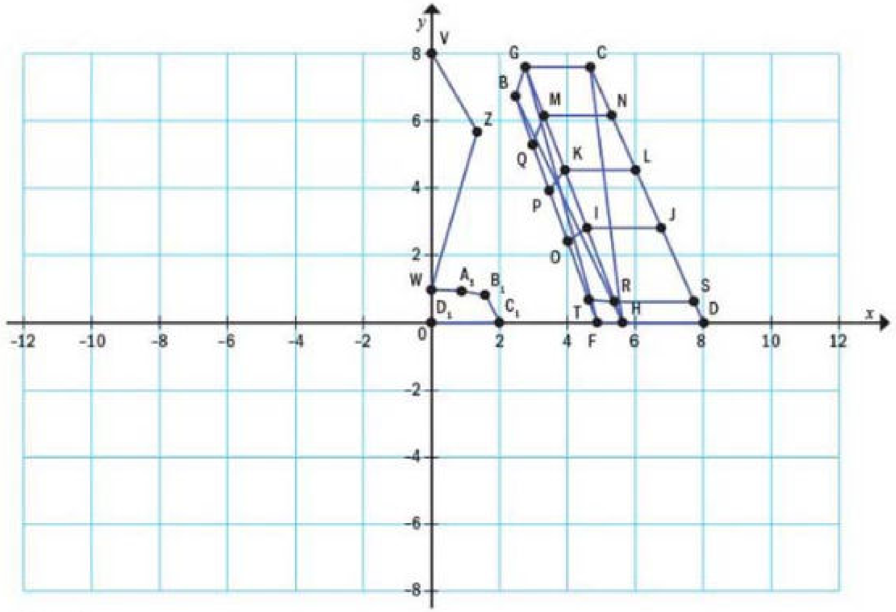


Figura 2.1

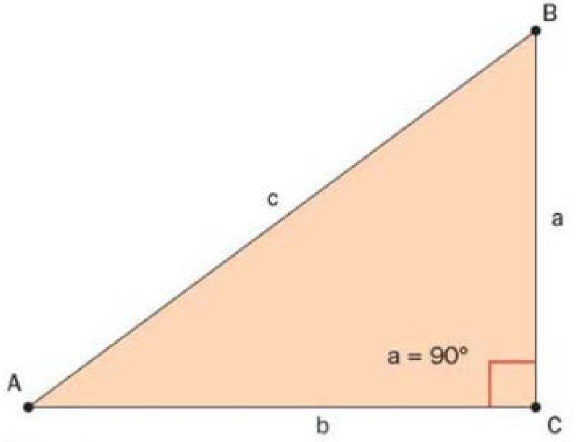
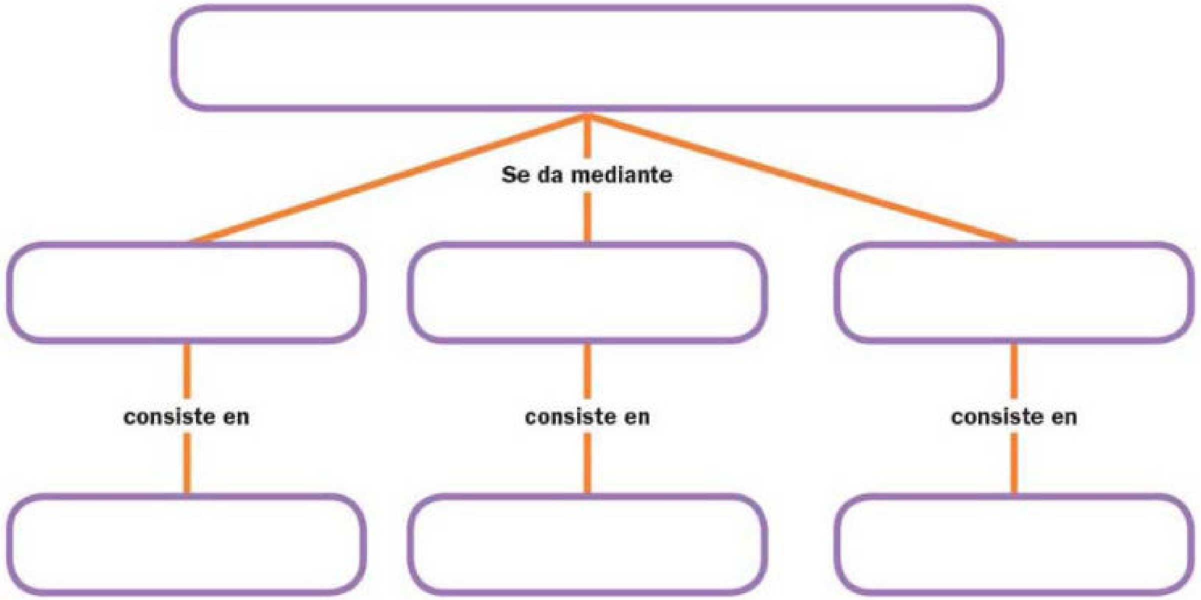


Figura 2.2

2. Analiza la figura 2.2 y responde las preguntas.
   a) ¿Qué tipo de triángulo representa? ______
   b) Si el lado *c* es una escalera cuya longitud es de 5 m y el punto de apoyo *A* se encuentra a 4 m de distancia de la pared, ¿a qué altura del piso se recarga la escalera (marcada con el punto *B*)?
   ______
   ______

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y encuentren las diferencias y las similitudes de sus procedimientos.



3. Organiza los siguientes conceptos en el mapa conceptual: rotación, transformación de figuras, girar una figura alrededor de un punto fijo, reflexión, mover una figura de su posición original, traslación, voltear una figura sobre una recta.

4. Encuentra una expresión para resolver la siguiente situación.
   a) David tiene el triple de la edad de Saúl; hace dos años la edad de David era cuatro veces la edad de Saúl, ¿cuáles son las edades de David y de Saúl en la actualidad? En parejas, comparen el procedimiento que siguieron y encuentren las diferencias y las similitudes entre ellos.

5. Una ruleta tiene 37 casillas numeradas del 0 al 36 (figura 2.3), sin contar el cero, tiene la misma cantidad de números rojos y negros.
   a) Indica cuál es la probabilidad de que la bola caiga en:
      - Rojo: ______
      - Par: ______
      - Cero: ______
   b) ¿Quién crees que tiene más probabilidades de ganar en este juego, tú o el casino? ______

Figura 2.3

Explica tu respuesta y compárala con la de tus compañeros. Con la ayuda de su profesor lleguen a una conclusión en grupo.

Ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Introducción

En el primer bloque iniciamos el estudio de las ecuaciones cuadráticas. Uno de los métodos más utilizados para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado es el *método de factorización*, y para aprenderlo primero estudiaremos el proceso inverso, es decir, el de desarrollo del producto entre sumas o diferencias de *binomios*. Comencemos por el caso más simple.

Desarrollo del producto con una suma o una diferencia

Comencemos por recordar que si a es un número cualquiera, el producto de una variable x por una suma (o diferencia) de la forma $(x \pm a)$ es una expresión cuadrática:

$$x(x + a) = x^2 + ax \quad \text{y} \quad x(x - a) = x^2 - ax$$

Veamos el desarrollo geométrico de las dos expresiones anteriores. Consideremos los dos cuadriláteros de las figuras 2.4 (a) y (b).

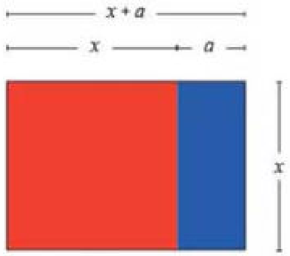


Figura 2.4 (a)

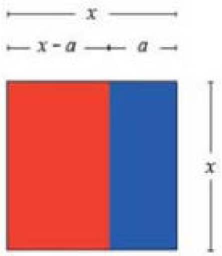


Figura 2.4 (b)

El área del rectángulo de la figura 2.4 (a) de base $(x - a)$ y altura x se puede descomponer como la suma de las áreas del cuadrado rojo y el rectángulo azul inscritos en él:

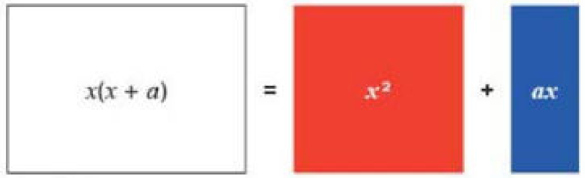
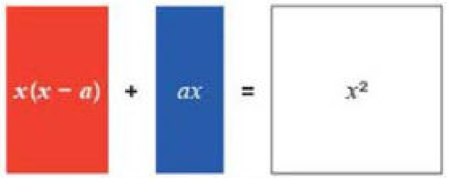
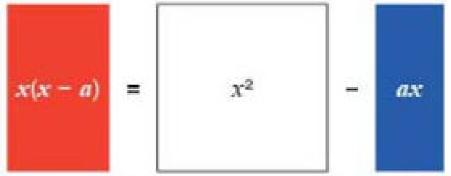


Figura 2.5

El área del cuadrado de lado x en la figura 2.5 también se puede descomponer como la suma de las áreas de dos rectángulos:



Despejando el área del rectángulo rojo, obtenemos la igualdad para la diferencia:



Si a es un número fijo y x representa una variable, la igualdad $x^2 + ax = x(x + a)$ es una *factorización* de la expresión cuadrática $x^2 + ax$, porque descomponemos la expresión como el producto de sus *factores*: x y $(x + a)$. La descomposición de una ecuación cuadrática en sus factores nos permite encontrar una solución a dicha ecuación. Por ejemplo, las soluciones de $x^2 + ax = 0$ son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -a$, ya que si sustituimos el valor $x = 0$ o $x = -a$, se cumple que:

$$(0)^2 + a(0) = 0 \cdot (0 + a) = 0 \quad \text{y} \quad (-a)^2 + a(-a) = (-a)(-a + a) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 + ax = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = -a$.

Construye tu conocimiento

Analiza la figura 2.6 y resuelve los siguientes planteamientos, con los que aprenderás a plantear y resolver las ecuaciones necesarias para obtener el área de una figura.

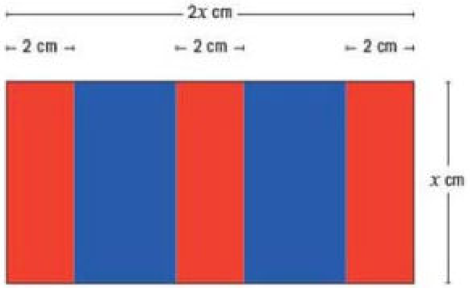


Figura 2.6

1. El rectángulo de la derecha tiene una base de $2x$ cm y una altura de x cm, dividido en dos regiones distintas, una formada por dos franjas de color azul y otra por tres de color rojo. Si queremos que el área de la región azul sea igual a $4x$ cm²:

   a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas permite calcular el área del rectángulo como la suma del área de la región roja más el área de la región azul? Justifica tu elección.

   $2x^2 = 2x$ $\qquad$ $3x^2 = 10x$ $\qquad$ $2x^2 = 10x$ $\qquad$ $3x^2 = 2x$

   b) Transforma la ecuación que señalaste en una ecuación de la forma $x^2 - ax = 0$ y exprésala como el producto de sus factores para determinar las soluciones.

   c) Una vez encontradas las soluciones, ¿cuál debe ser el valor de x si el área de la región azul es $4x$ cm²?

   d) Determina una ecuación cuadrática que permita encontrar el valor de la longitud x, de tal modo que la región azul tenga un área de $10x$ cm², y resuélvela para determinar las soluciones.

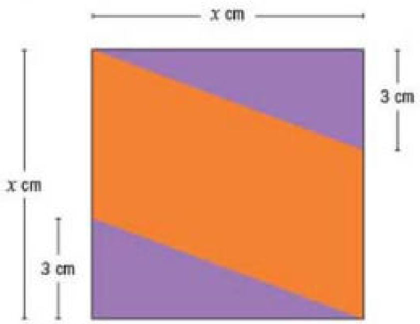


Figura 2.7

Analiza la figura 2.7 y después responde las preguntas relacionadas.

1. Si se quiere que el área de la franja de color anaranjado sea igual a $10x$ cm²:
   a) Señala cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas permite calcular el área del cuadrado como la suma del área de la región morado más el área de la franja anaranjada. Justifica tu elección.

   $4x^2 = 7x$ $\quad$ $4x^2 = 13x$ $\quad$ $x^2 = 13x$ $\quad$ $x^2 = 7x$

2. Convierte la ecuación del inciso anterior en una ecuación de la forma $x^2 - ax = 0$.

3. Factoriza la expresión que encontraste en el inciso anterior como un producto de la forma $x(x - a)$, y usa esta factorización para determinar las soluciones de la ecuación cuadrática del inciso a).

4. Con ayuda del inciso anterior, responde la pregunta original: ¿qué valor debe tener la longitud x?

Desarrollo del producto de dos diferencias

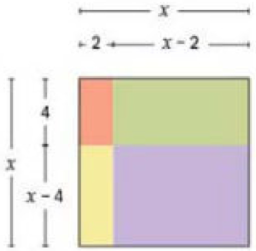
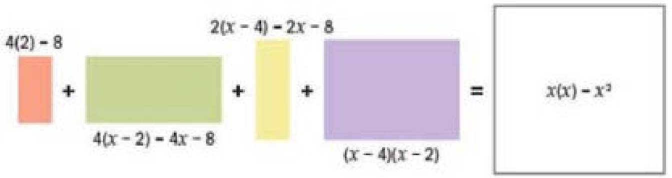


Figura 2.8

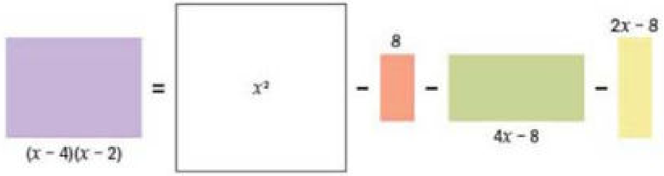
Analicemos ahora el desarrollo de un producto de dos diferencias de la forma:

$$(x - a)(x - b)$$

Tomemos el ejemplo $(x - 2)(x - 4)$. Para ello consideramos un cuadrado de lado x cm en el que inscribimos un rectángulo de 2×4 cm (figura 2.8). Al sumar el área de cada uno de los cuatro rectángulos de colores de la figura obtenemos el área del cuadrado de lado x, es decir, se cumple la siguiente igualdad:



Si despejamos el área del rectángulo azul obtenemos:



Es decir: $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$

Resolvemos la ecuación anterior y encontramos sus soluciones: $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$, porque $(x - 2)(x - 4) = 0$, cuando $x = 2$ o $x = 4$.

Si x es una variable y a, b son dos números cualesquiera, entonces se cumple la factorización:

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ son $x = a$ y $x = b$.

Por ejemplo, si buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6$,

tenemos que: $(x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$;

ya que $-3 - 2 = -5$ y $(-3)(-2) = 6$, por lo tanto, las soluciones de la ecuación anterior son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$.

Aplícalo

En tu cuaderno, resuelve el siguiente planteamiento.

1. La figura 2.9 es un cuadrado de lado $6x$ cm que tiene inscritos cuatro cuadrados grises.
   a) Calcula el área de la región azul en términos de x.
   b) Si queremos que la suma de las áreas de los cuatro cuadrados tenga un valor de $(60x - 40)$ cm², ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa el cálculo del área del cuadrado de lado $6x$ como suma de las áreas de la región azul y la región gris? Explica tu elección.

      $60x - 40 = 36x^2 + 16x^2$

      $36x^2 = 16x^2 + 60x - 40$

      $60x - 40 = 6x^2 + 4x^2$

      $6x^2 = 4x^2 + 60x - 40$

   c) Transforma la ecuación del inciso anterior en una de la forma $x^2 + Ax + B = 0$.
   d) Factoriza la ecuación anterior como $(x - a)(x - b) = 0$
   e) ¿Cuál es el valor que puede tener la longitud x para que la suma de las áreas de los cuadrados grises en la figura 2.9 tengan un área de $(60x - 40)$ cm²?

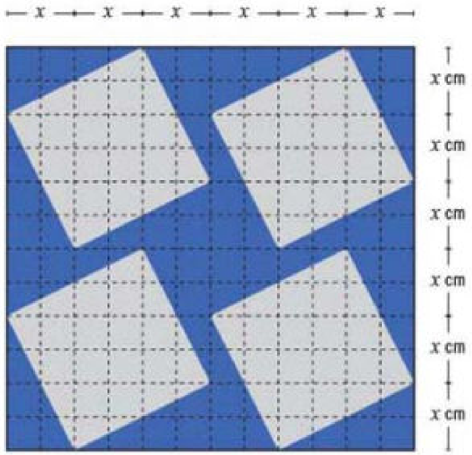


Figura 2.9

2. Determina el valor de la longitud x tal que el área de la región azul de la figura 2.9 sea $(80x - 40)$ cm². Para ello encuentra primero la ecuación cuadrática correspondiente y factorízala para encontrar las soluciones.

Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros, y si hay diferencias revísenlas con su docente.

El producto de una suma por una diferencia

Para desarrollar un producto de la forma $(x + a)(x - b)$, es decir, el producto de una suma por una diferencia de binomios, consideremos un rectángulo de base $(x + a)$ y altura $(x - b)$, como el de la figura 2.10.

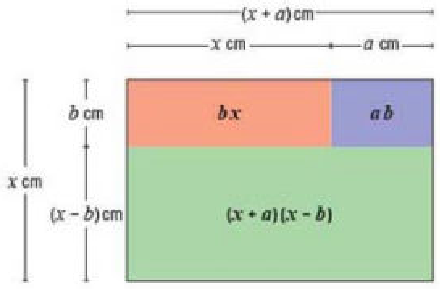


Figura 2.10

Sumando las áreas de los rectángulos de colores obtenemos:

$$x(x + a) = x^2 + ax \quad = \quad (x + a)(x - b) \quad + \quad bx \quad + \quad ab$$

Y al despejar el área del rectángulo verde:

$$(x + a)(x - b) \quad = \quad x^2 + ax \quad - \quad bx \quad - \quad ab$$

Es decir: $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$

Si x es una variable y a, b son números cualesquiera, la factorización:

$$x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$$

nos permiten obtener las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 + (a - b)x - ab = 0$$

las cuales son $x_1 = -a$ y $x_2 = b$.

Aplícalo

Resuelve los siguientes planteamientos en tu cuaderno.

1. El cuadrado de la figura 2.11 tiene de lado x cm y en él están inscritos cuatro cuadrados azules de 2×2 cm.

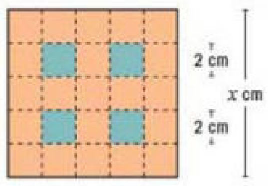


Figura 2.11

   a) Si buscamos el valor de la longitud x para el cual el área de la región naranja sea igual a $6x$ cm², ¿cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas corresponde al cálculo del área del cuadrado de lado x, como suma del área de la región naranja y el área de los cuadrados azules? Explica tu elección.

   $x^2 + 16 = 6x$ $\qquad 6x = x^2 + 16$ $\qquad x^2 = 6x + 4$ $\qquad x^2 = 6x + 16$

   b) Transforma la ecuación cuadrática del inciso anterior en una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + ax + b = 0$, y factoriza en la forma:

   $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$

   c) Determina el valor de x para el cual el área de la región naranja es igual a $6x$ cm².

Construye tu conocimiento

En parejas, resuelvan los siguientes planteamientos. Escriban detalladamente sus procedimientos, ya que al finalizar los compararán con los de sus compañeros.

1. Analicen la figura 2.12 y respondan.

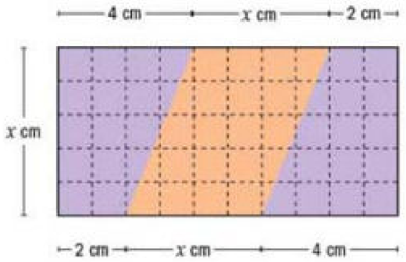


Figura 2.12

   a) Si queremos que el área de la franja anaranjada sea de 3 cm², ¿con cuál de las siguientes ecuaciones se obtiene el área del rectángulo como la suma de las áreas de las regiones morada y anaranjada? Expliquen su elección.

   $x^2 + 4x = 6x + 3$ $\qquad x^2 + 4 = 6x + 3$ $\qquad x^2 + 4x = 3$ $\qquad x^2 = 6x + 3$

   b) ¿Cuánto mide la base y la altura de dicho rectángulo?

c) Escriban la ecuación cuadrática del inciso anterior en la forma $x^2 + Ax + B = 0$ y factoriza como $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$.

d) ¿Para qué valor de x el área de la franja anaranjada es igual a 3 cm²?

2. Utilizando la figura 2.13, deduzcan la siguiente factorización:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

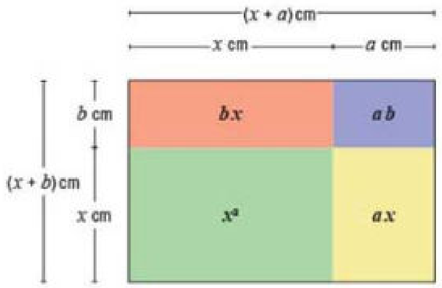


Figura 2.13

a) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + (a + b)x + ab = 0$?

Cierre

En particular, para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + Ax + B = 0$ nos podemos remitir a buscar números a y b tales que:

$$A = (a - b) \quad \text{y} \quad B = -ab.$$

o

$$A = -(a + b) \quad \text{y} \quad B = ab.$$

Taller de matemáticas

Resuelvan los siguientes planteamientos en parejas.

1. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $(x - 6)(x + 2) = 0$? Escriban su procedimiento.

2. Determinen cuál de las siguientes factorizaciones es correcta y describan el procedimiento que siguieron para encontrarla.

a) $(x - 1)(x - 1) = x^2 - x - 1$

b) $(x - 1)(x - 1) = x^2 + 2x - 1$

c) $(x - 1)(x - 1) = x^2 - 2x + 1$

d) $(x - 1)(x - 1) = 2x^2 - 2x - 2$

3. Utilicen la factorización $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$ para transformar las siguientes ecuaciones en la forma $(x + a)(x - b) = 0$.

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$

d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 2x - 3 = 0$

4. Por medio de una ecuación cuadrática, encuentren la longitud x para el cuadrado de la figura 2.14, sabiendo que el área de la región amarilla es igual a 48 cm².

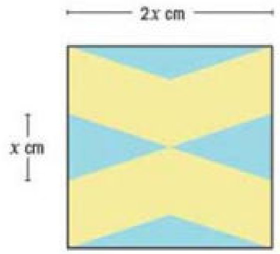


Figura 2.14

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Glosario

Intuitiva. *Que posee la facultad de comprender las cosas sin necesidad de razonamiento.*

Introducción

En las lecciones 1.1 y 1.2 del primer bloque trabajaste de manera **intuitiva** con transformaciones geométricas del plano, en particular trasladando y rotando figuras, sin que su forma y tamaño cambien. En esta lección profundizaremos el estudio de los conceptos de *traslación* y *rotación*, analizando principalmente las propiedades que conservan las figuras que experimentan estas transformaciones

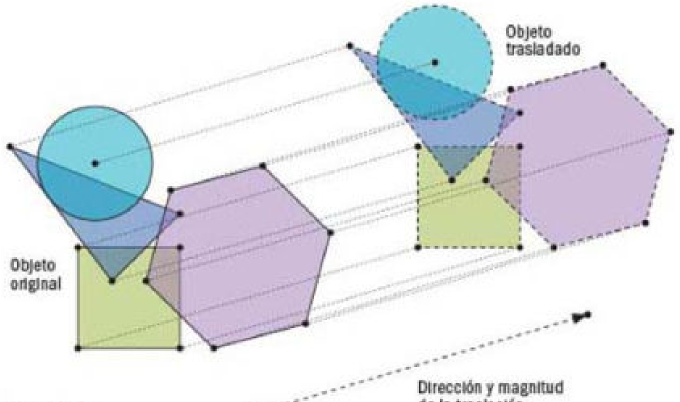


Figura 2.15

Traslación

Comencemos recordando que una *traslación* es una transformación del plano en la que se mueven de manera rígida, en una dirección y a lo largo de una distancia determinada los puntos de cualquier figura u objeto del plano.

El segmento de recta dirigido (la flecha de la figura 2.15) une cualquier punto de la figura original con su punto correspondiente en la figura trasladada, ya que se conservan la misma dirección y la misma magnitud.

A partir de esta anotación, podemos afirmar que si a una línea recta cualquiera le aplicamos una traslación, obtendremos otra línea recta *paralela* a la original (figura 2.16).

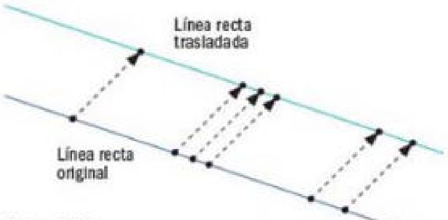


Figura 2.16

Una traslación transforma un segmento de recta en otro segmento de la misma magnitud.

Una traslación transforma un ángulo formado por dos segmentos de recta en otro ángulo de la misma magnitud (figura 2.17 a).

Recuerda que si se tienen dos pares de líneas paralelas, como las de la figura 2.17 b, entonces las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales, y la de los ángulos α y β también.

Nota: Utilizaremos las siguientes letras del alfabeto griego para denotar ángulos y rotaciones por un cierto ángulo: alfa (α), beta (β) y epsilon (ε).

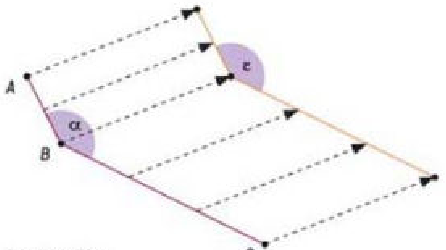


Figura 2.17 a

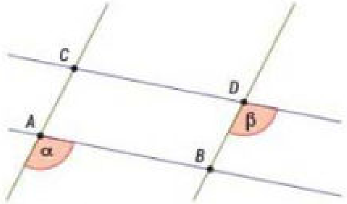


Figura 2.17 b

Construye tu conocimiento

En parejas, resuelvan los siguientes planteamientos en los que aplicaran la traslación de figuras en el plano. Trabajen en su cuaderno.

1. Supongamos que en la figura 2.18 el punto *A* es transformado por una traslación dada en el punto *B*.

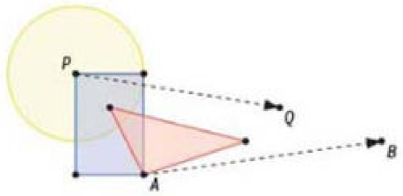


Figura 2.18

   a) En su cuaderno, dibujen el objeto geométrico que se obtiene al trasladar el triángulo rojo por la misma transformación.

2. Supongamos ahora que el punto *P* es transformado por otra traslación en el punto *Q*.
   a) ¿A qué objeto es transformado el rectángulo azul por dicha traslación?
   b) ¿Y la circunferencia amarilla? Dibújenlo en su cuaderno.
   c) Hagan un dibujo de éstos en la figura 2.18. Dibújenlo en su cuaderno.

3. El triángulo morado de la figura 2.19 es el resultado de haber trasladado un triángulo *ABC* que no aparece en la imagen. ¿Cuál es el área del triángulo *ABC*? Expliquen cómo encontraron el área del triángulo original.

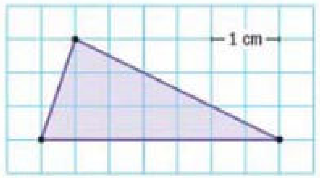


Figura 2.19

4. En la figura 2.20, los puntos *P*, *Q* y *R* son transformados por una traslación de los puntos *A*, *B* y *C* respectivamente. Si *Q* es el punto medio del segmento $\overline{PR}$ y la distancia de *P* a *R* es de 2 cm:
   a) ¿Cuál es la distancia del punto *C* al punto *B*?
   b) ¿Cuál es la distancia del punto *B* al punto medio del segmento $\overline{AC}$?

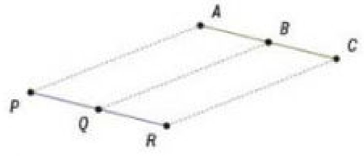


Figura 2.20

5. Dibujen en la figura 2.21 un segmento de recta dirigido que determine la traslación que transforma el triángulo ABC en el triángulo naranja. Marquen con los nombres P, Q y R los vértices del triángulo naranja que correspondan bajo la traslación a los vértices A, B y C respectivamente.
   a) ¿A qué ángulo del $\triangle PQR$ corresponde el ángulo BCA bajo dicha traslación?

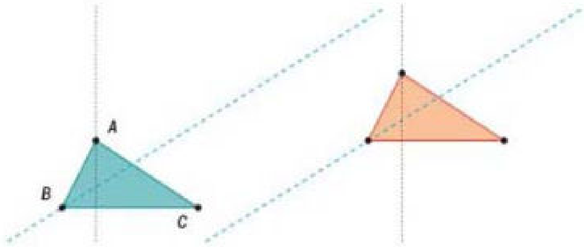


Figura 2.21

6. En la figura 2.21 las líneas negras pasan por las alturas de los $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$, y las líneas las azules son *bisectrices* de los mismos triángulos. Si trasladamos las líneas negra y azul del $\triangle ABC$ usando la misma traslación que lo transforma en el triángulo naranja, ¿qué líneas se obtienen?

Comparen sus procedimientos y resultados con los de sus compañeros y verifiquen las similitudes y diferencias. Si es necesario corregir, pidan a su docente que les explique cómo hacerlo.

Rotación

Las *rotaciones* son transformaciones del plano que consisten en girar de forma rígida las figuras y los objetos en el plano, en torno de un punto dado denominado *centro de rotación*.

Si C es un punto fijo del plano y α es un ángulo, la rotación en torno de C con amplitud α puede ser en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj (figura 2.22 a) o en sentido contrario (figura 2.22 b).

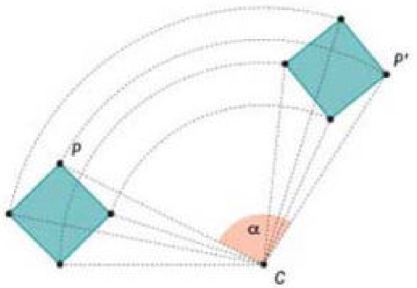


Figura 2.22 a
Rotación en torno del punto C, un ángulo α, en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

(a)

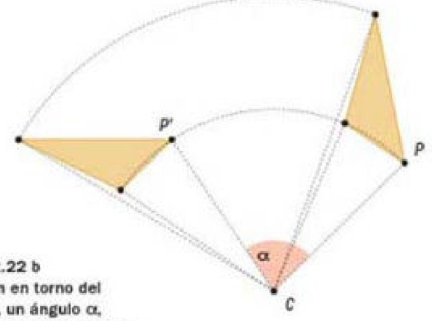


Figura 2.22 b
Rotación en torno del punto C, un ángulo α, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

(b)

Una rotación hace corresponder a cada punto P en un objeto del plano, un único punto P' en el objeto rotado. De modo que los segmentos $\overline{CP}$ y $\overline{CP'}$ tienen la misma longitud y el ángulo α es igual al $\measuredangle P'CP$ o $\measuredangle PCP'$, según si la rotación se hizo en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario, respectivamente.

Al igual que las traslaciones, las rotaciones preservan las longitudes de los segmentos y los ángulos que éstos forman (figura 2.23).

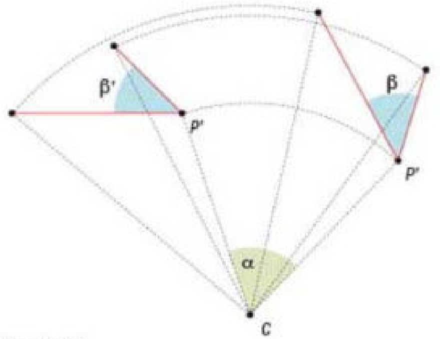


Figura 2.23
Rotación en torno a al punto C, un ángulo α, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Aplícalo

Lleva a cabo las siguientes actividades en tu cuaderno (dibuja las figuras 2.24, 2.25 y 2.26). Al finalizar verifica tus procedimientos con tu docente.

1. Traza en la figura 2.24 el triángulo que se obtiene de rotar en torno de O el triángulo ABC, de modo que el vértice A sea transformado en el vértice P.
   a) ¿De cuántos grados es la rotación y en qué dirección se debe efectuar?
   b) ¿Hay una sola forma de responder a la anterior pregunta? Escribe tu argumento.

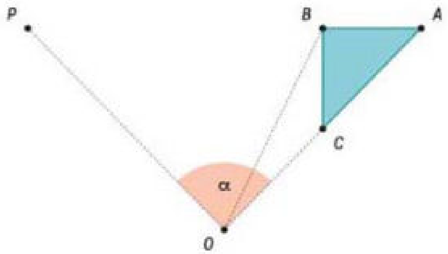


Figura 2.24

2. En la figura 2.25 el triángulo verde es el resultado rotar al triángulo azul un ángulo α en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Señala en la figura, con la letra P, el vértice del triángulo verde que corresponde con el vértice A del triángulo azul al aplicar la rotación. Haz lo mismo con las letras Q y R para los vértices B y C respectivamente.

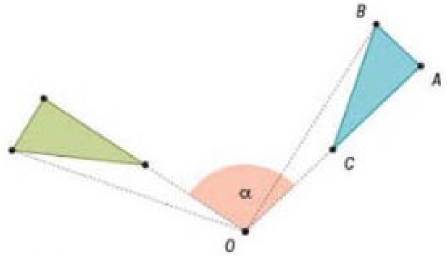


Figura 2.25

3. ¿Los ángulos BAC y RPQ son iguales? ¿Cuánto miden? Explica tu razonamiento.

4. La figura 2.26 muestra dos hexágonos irregulares, los cuales cumplen que si rotamos al hexágono de colores verde y morado 130°, respecto al punto 0, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, obtenemos al hexágono de colores azul y amarillo.

   Si la línea roja es la bisectriz del ángulo interno en el vértice A –del triángulo morado–, señala con la letra P el vértice del triángulo amarillo que corresponde al vértice A, y traza la línea que corresponde a la línea roja bajo la rotación.
   a) ¿Cuál es la relación entre la línea que trazaste y la bisectriz del ángulo interno del triángulo amarillo en P? Explica tu respuesta.
   b) Calcula el área del triángulo amarillo sin usar tu regla. ¿Cuál es su valor?
   c) ¿Cuánto mide el área de la región azul? Explica cómo encontraste el área.

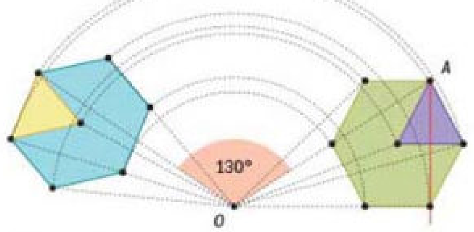


Figura 2.26

Glosario

Precisar. Determinar de modo exacto.

Construye tu conocimiento

Centro de rotación

El cuadrilátero gris de la figura 2.27 es el resultado de haber rotado al cuadrilátero verde con respecto a un punto que no se ha **precisado**.

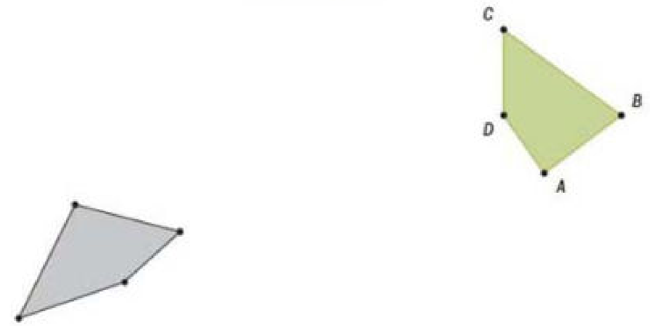


Figura 2.27

En tu cuaderno, copia la figura 2.27 y lleva a cabo el siguiente procedimiento que te permitirá encontrar dicho punto.

1. Señala en la figura 2.27, usando las letras *P*, *Q*, *R* y *S*, los puntos del cuadrilátero gris que corresponden con los vértices *A*, *B*, *C* y *D* del cuadrilátero verde bajo la rotación.
2. Usa las letras *X* e *Y* para nombrar en la figura 2.27 los puntos medios de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$, y traza una línea recta perpendicular a $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ que pase por *X* y *Y* respectivamente.
3. Llama *O* al punto de intersección de las líneas que trazaste por los puntos *X* y *Y*.
   a) ¿Cuánto miden los $\measuredangle AOP$ y $\measuredangle BOQ$? ¿Cuánto suman?
4. Mide las longitudes de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{PO}$, ¿son iguales? Explica tu respuesta.
   Mide también las longitudes de los segmentos $\overline{BO}$ y $\overline{QO}$.
5. Realiza el mismo procedimiento señalado en las preguntas 2, 3 y 4, pero con los segmentos $\overline{CR}$ y $\overline{DS}$. ¿El punto de intersección de esta *mediatriz* y los ángulos que encontraste son iguales a los anteriores?
6. ¿Cuál es el centro de la rotación que transforma el cuadrilátero *ABCD* en el cuadrilátero *PQRS*? ¿En qué dirección y de cuántos grados debe ser la rotación?

Cierre

Las traslaciones y las rotaciones son transformaciones del plano que deslizan y giran respectivamente a las figuras, conservando las longitudes de los segmentos que las conforman, así como las magnitudes de los ángulos entre segmentos correspondientes.

En particular, si un $\triangle ABC$ es transformado en un $\triangle PQR$ por una traslación o una rotación, las *alturas*, las *medianas*, las *mediatrices* y las *bisectrices* del triángulo $\triangle ABC$ son transformadas en las alturas, las medianas, las mediatrices y las bisectrices correspondientes del triángulo $\triangle PQR$.

Taller de matemáticas

Copia la figura 2.28 en tu cuaderno y lleva a cabo las siguientes actividades.

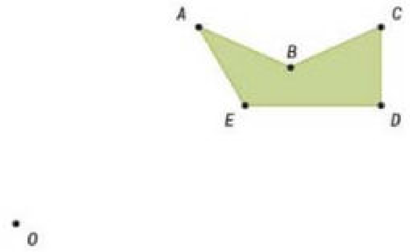


Figura 2.28

1. Con tu juego de geometría traza la figura que se obtiene de rotar el polígono irregular *ABCDE* (de la figura 2.28):
   a) Un ángulo de 95° con respecto al punto *O*, en el mismo sentido que el movimiento de las manecillas del reloj.
   b) Un ángulo de 265° con respecto al punto *O* en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
   c) ¿Qué tan distintas son las dos figuras que trazaste? Comenta tus conclusiones con tus compañeros.
   d) ¿Qué figura se obtiene si rotas el polígono *ABCDE* 360° con respecto al punto *O* en el mismo sentido que las manecillas del reloj? Explica tu respuesta.
   e) ¿Y si lo rotas 360° en sentido contrario al de las manecillas del reloj? Explica tu respuesta.

2. En la figura 2.29 indica con la letra *X* cuál es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Traza una línea perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por *X*.

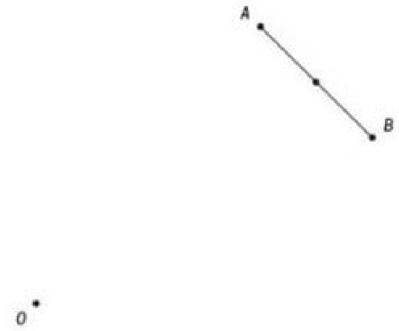


Figura 2.29

   a) Dibuja la figura que se obtiene de rotar el segmento $\overline{AB}$ y la línea perpendicular a éste respecto del punto *O*, 60° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
   b) En una hoja cuadriculada traza un triángulo rectángulo de base 3 cm y altura 2 cm. Usando tu regla y el transportador, rota el triángulo que dibujaste respecto de algún punto de la hoja el ángulo de tu elección (por ejemplo 100°) en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
   c) Borra el centro de rotación y las líneas auxiliares que utilizaste en el trazo de tu figura, dejando solamente los dos triángulos (el original y el rotado). Pide a un compañero que encuentre el centro de la rotación y que determine el ángulo de rotación.

Aplicaciones de la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Introducción

¿Sabes qué son los *ambigramas*? Son textos, frases o palabras que se pueden leer de, al menos, dos formas diferentes: una es la forma en que convencionalmente se lee cualquier texto, de izquierda a derecha, y otra es colocando el ambigrama boca abajo, frente a un espejo, girándolo 180° o realizando algún movimiento que dependerá de sus características. Además de los ambigramas, también hay imágenes que se pueden ver de distintas maneras si las rotamos.

1. Analicen las siguientes imágenes; después, dirigidos por su docente, comenten en grupo las preguntas.

a) ¿Qué tienen en común las imágenes anteriores?

b) ¿Qué pueden leer o mirar en cada una de ellas?

c) ¿Qué deben hacer para poder leer de forma convencional, es decir, de izquierda a derecha, el texto contenido en cada imagen?

2. Ahora un reto. En el siguiente cuadro elabora un diseño con tu nombre, de tal modo que pueda leerse de forma convencional y también de una forma alternativa.

Aplícalo

Utilizando las propiedades que has identificado para construir figuras simétricas, realiza lo que se te pide en cada situación.

1. En las figuras 2.30 (a) y (b), traza al menos dos ejes de simetría para cada figura.
2. Escribe en tu cuaderno el procedimiento que seguiste para trazar los ejes de simetría y explica de qué simetría se trata.

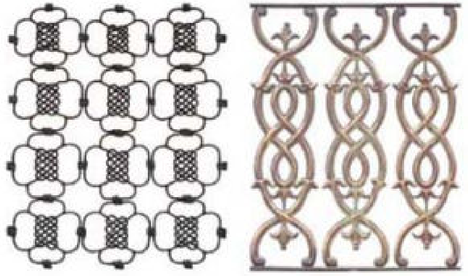
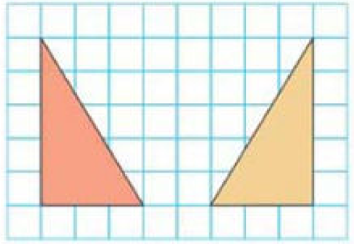


Figura 2.30 (a) y (b).

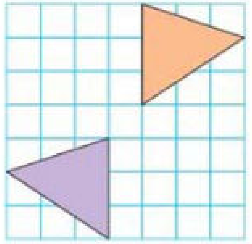
Analiza los siguientes pares de figuras y escribe lo que se solicita.

1. Indica qué tipo de transformación se llevó a cabo para obtener los siguientes pares de figuras y explica cuál fue el procedimiento.

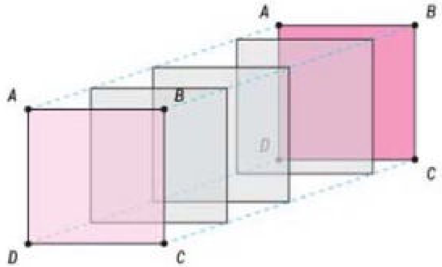
a)



b)



c)



Glosario

Invariancia. *Se dice de una figura geométrica cuando no varía al aplicarle una transformación.*

Recuerda que la simetría es una característica de las figuras geométricas relacionada con su **invariancia** bajo ciertas transformaciones, como las rotaciones, las traslaciones y las reflexiones, o una combinación de dos o más de éstas. Una figura simétrica puede tener uno o más ejes de simetría; por ejemplo, todos los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados.

Construye tu conocimiento

A partir de la siguiente figura dibuja dos figuras simétricas a ella respecto del punto *O*.

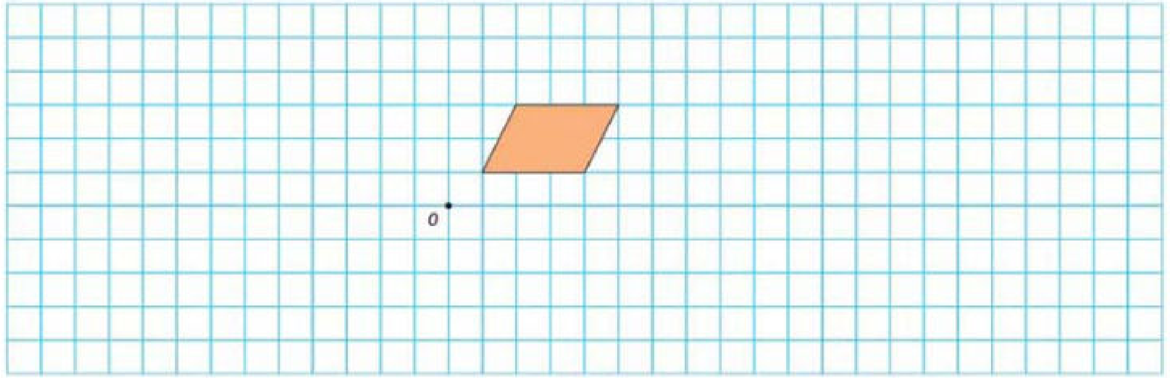
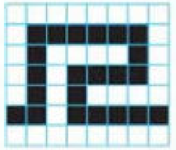
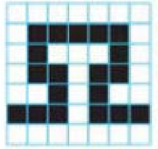


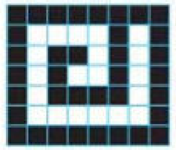
Figura 2.31 Fotografía de los ornamentos formados con grecas en un edificio prehispánico.

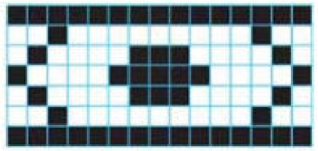
La figura 2.31 muestra una edificación prehispánica con adornos en forma de grecas.

1. Reproduce en cada caso la greca que aparece, de tal manera que se convierta en un mosaico; no olvides aplicar las propiedades de los distintos tipos de simetría que has aprendido. Describe en cada una el proceso que seguiste para construir el mosaico.









Compara tus diseños con los de otro compañero y comenten cuál es la mejor estrategia para elaborar el diseño de una manera más sencilla y rápida.

La mayoría de las empresas, las escuelas y las instituciones gubernamentales utilizan **logotipos** para representar sus marcas o los servicios que brindan, y para ello emplean imágenes que suelen ser simétricas.

Glosario

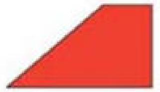
Logotipo. *Distintivo formado por letras, abreviaturas, etcétera, peculiar de una empresa, conmemoración, marca o producto.*

Aplícalo

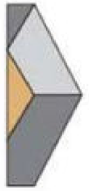
Las siguientes figuras son parte de algún logotipo. Analiza qué tipo de simetría tiene cada uno y complétalo en tu cuaderno para descubrir las figuras.

1. Abajo de cada figura anota el tipo de simetría que aplicaste.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Una vez completados los logotipos, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál es el proceso más sencillo para elaborar los diseños?
   b) ¿En qué diseño aplicaron la rotación como propiedad de la simetría?
   c) ¿En cuál aplicaron la traslación?
   d) ¿Cuál de los diseños implicó utilizar la simetría axial?

Figura 2.32

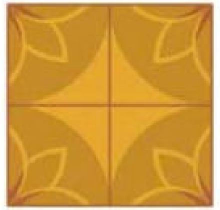


Figura 2.33

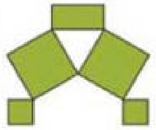
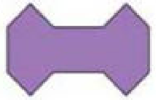
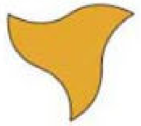
El piso de la casa de Sandra tiene piezas de loseta como la que aparece en la figura 2.32, y uno de los mosaicos que se forman al juntar cuatro piezas es el que se ve en la figura 2.33.

1. ¿Qué otra figura puede formarse al seguir agregando piezas al mosaico?

2. ¿Qué propiedades de la transformación de figuras mediante la simetría se están aplicando en el diseño del mosaico? Explica tu respuesta.

A continuación se muestran algunos diseños individuales.

1. En tu cuaderno, reprodúcelos cuantas veces sea necesario hasta formar mosaicos. Anota en cada caso el tipo de transformación que estás aplicando.

a) 
b) 
c) 
d) 

TIC a tu alcance

Consulta las siguientes ligas, en ellas podrás encontrar múltiples aplicaciones de las propiedades y tipos de simetría.

www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm
http://dibutodo.blogspot.mx/2013/01/ejercicios-sobre-la-simetria-central-1.html
http://martha-gutierrez.blogspot.mx/2010/12/simetria-axial-y-central-rotacion-y.html
www.departamentodedibujo.es/dibujo_artistico_1/Unidad3/DA1_U3_T2_Contenidos_v02/41_los_ejes_simetra_axial_y_radial.html

Cierre

Los diseños que combinan la *simetría axial* y *central*, la *rotación* y la *traslación* de figuras pueden ser de distintos tipos y tienen múltiples aplicaciones, por ejemplo en la alfarería (como en el caso de diseños en puertas y ventanas), la jarciería (en cintos y monturas) y en la albañilería (losetas y rosetones de yeso); pero todos ellos deben respetar ciertas propiedades para que sus transformaciones sean simétricas.

a) En los diseños en que se aplique la traslación se debe tomar en cuenta que será traslación entre un par de figuras, siempre y cuando los segmentos que unen dos puntos en una son correspondientes con los *homólogos* en la otra, y si tienen la misma medida y son paralelos entre sí, o si son la misma recta, a la vez que se conservan los ángulos y las medidas de los lados de la figura original.

b) En los diseños en que se aplique la rotación hay que recordar que la medida de rotación es a partir de un ángulo que parte del *centro de rotación*; si la rotación se hace en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo será positivo, y el ángulo será negativo si se hace en el sentido de las manecillas del reloj.

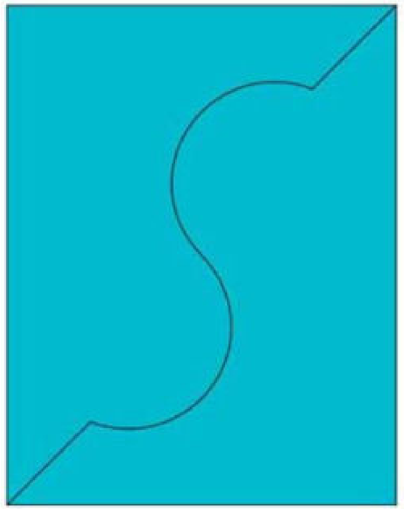
En general, es importante tomar en cuenta que una figura simétrica con respecto a un punto conserva la medida de los lados y los ángulos de la figura original.

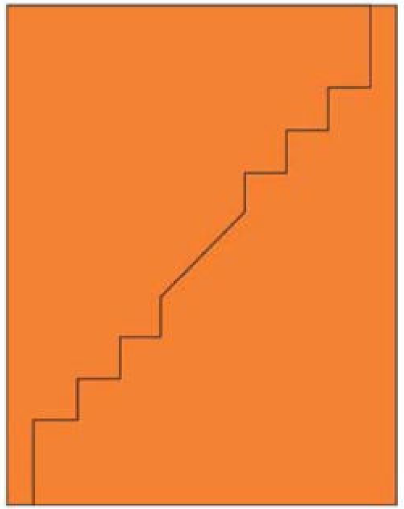
Taller de matemáticas

Formen equipos de tres compañeros para realizar las siguientes actividades.

1. Consigan cuatro hojas de papel tamaño carta y recorten cada una de ellas en cuatro rectángulos iguales, de modo que obtengan 16 hojas.

2. Elaboren en cada hoja un par de diseños simétricos de tal manera que al recortarlos puedan empalmarse y cada uno de sus lados sea correspondiente con su par, lo mismo que sus ángulos y las medidas de sus lados. Tomen en cuenta los siguientes ejemplos y prueben que cumplan las condiciones establecidas.





3. Después de realizar la actividad, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue el punto de partida para la elaboración de todos los diseños?

b) ¿Cuántos diseños pudieron elaborar utilizando sólo líneas y segmentos rectos?

c) ¿Cuántas diseños distintos podrán elaborarse siguiendo siempre la misma instrucción?

d) ¿Cuál es una regularidad, una constante o una condición necesaria que debe cumplirse para la elaboración de cada uno de los diseños?

Relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

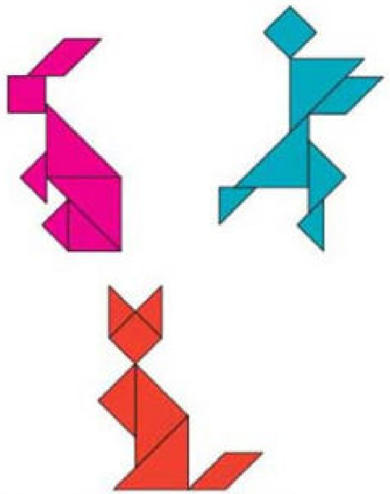


Figura 2.34 El tangram es un juego chino que data del siglo I d.n.e.

Introducción

¿Alguna vez has visto o jugado con un *tangram*? Un tangram es un tipo de rompecabezas compuesto por varias figuras geométricas, inicialmente dispuestas en forma de cuadrado, con las cuales se puede construir una gran cantidad de figuras diferentes, por ejemplo, animales, flores, barcos, etcétera (figura 2.34).

Analiza la figura 2.34, ¿qué tipo de relaciones encuentras entre las figuras que forman un tangram? Coméntalo con tus compañeros.

Ahora construiremos un "tangram incompleto". Con ayuda de tus escuadras traza dos cuadrados del mismo tamaño, uno en cartulina azul (o tu color preferido) y el otro en cartulina blanca. Sobre el cuadrado blanco traza cuatro triángulos rectángulos congruentes en las esquinas, de la siguiente manera: con una sola medida de tu compás marca cuatro puntos sobre los lados del cuadrado a partir de cada vértice, recorriéndolos de manera continua y en la misma dirección. Después une los puntos que estén sobre lados consecutivos y colorea los triángulos que se forman. La figura resultante debe ser semejante a la figuras 2.35 b y c.

Recorta las cinco piezas que se formaron y arma la configuración original sobre el cuadrado azul sin usar el cuadrado blanco, verás que el cuadrado azul no se cubre en su totalidad. Ahora encuentra una configuración en la que se formen dos cuadrados, no necesariamente iguales, sobre la superficie que no queda cubierta en el cuadrado azul. ¿Adviertes diferencias entre esta nueva superficie sin cubrir y la que no se cubrió originalmente? Coméntalas en grupo.

Esta vez construye otros dos cuadrados con la cartulina blanca; uno cuyos lados sean iguales a la longitud del cateto menor de los triángulos rectángulos que construiste al inicio, y el segundo cuyos lados sean iguales a la longitud del cateto mayor. Si usas estos dos cuadrados junto con los cuatro triángulos rectángulos, ¿puedes cubrir por completo el cuadrado azul? Intercambia tus ideas con tus compañeros y tu docente.

Si usas el cuadrado grande y los cuatro triángulos, ¿puedes cubrir por completo el cuadrado azul?

Explica, en términos de las áreas de las figuras, lo que sucede.

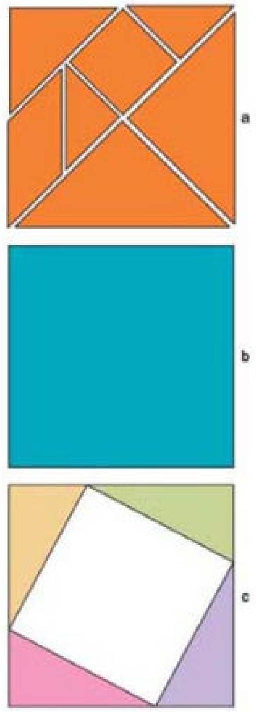


Figura 2.35 a, b y c

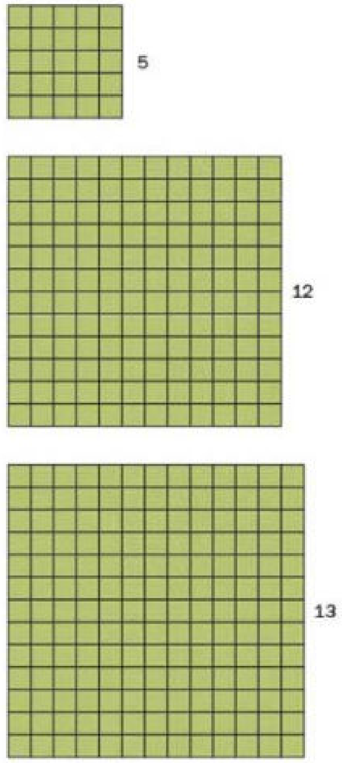
Aplícalo

Analiza las siguientes ternas de cuadrados y argumenta si con los dos pequeños puedes cubrir la superficie del grande.

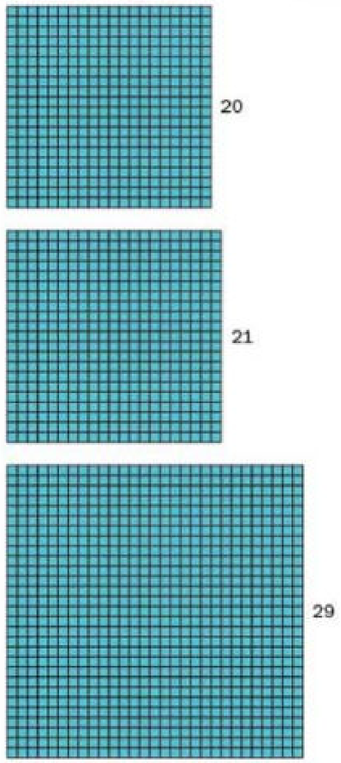
Glosario

Terna. Conjunto de tres personas, animales o cosas.

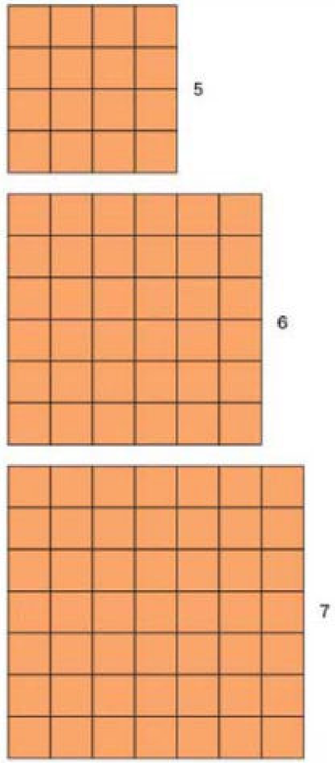
a)



b)



c)



Responde las siguientes preguntas.

Calca los cuadrados anteriores en una hoja y recórtalos. Si cada terna la acomodas de manera que formen un triángulo, ¿qué tipo de triángulo crees que se forma?

Con tu transportador mide los ángulos de cada triángulo formado y anótalos:

¿Para cuáles ternas, el triángulo que se forma es rectángulo?

¿Puedes relacionar las áreas de los cuadrados y el tipo de triángulo formado? Argumenta tu respuesta:

En la siguiente tabla aparecen ternas de lados de cuadrados o sus áreas. Completa la tabla y argumenta en cuáles de esas ternas se puede formar un triángulo rectángulo y construye el triángulo rectángulo correspondiente con el método de la actividad anterior. Al finalizar, compara tus respuestas con las de tus compañeros y si difieren pídanle a su docente que les ayude a corregirlas.

Ternas	Área 1	Área 2	Área 3	Argumento
3, 4 y 5				
8, 15 y 19				
5, ____ y ____		144	225	
8, ____ y 17		225		
7, ____ y ____		576	625	
____, ____ y ____	169	7 056	7 225	

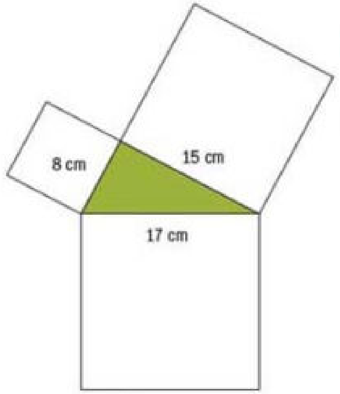


Figura 2.36 (a)

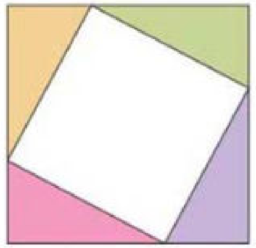


Figura 2.36 (b)

Aplícalo

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. Consideren las figuras 2.36 a y b, y resuelvan los siguientes planteamientos.
   a) Se muestran tres cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo de lados 8, 15 y 17 cm respectivamente (figura 2.36 a). Si los colocamos juntos, ¿cuánto mide el área de color verde? Justifiquen su respuesta.
   b) La figura 2.36 (b) está formada por cuatro triángulos rectángulos congruentes cuyos lados miden 5, 12 y 13 cm respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrado blanco? Expliquen cómo lo calcularon.
2. Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y verifiquen si hay similitudes o diferencias en la forma de resolver los problemas anteriores. Con ayuda de su docente, escriban el método más sencillo para resolver problemas similares a los anteriores.

Cierre

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Una *terna pitagórica* está formada por tres números reales *a*, *b*, *c*, que cumplen la siguiente regla: la suma de los cuadrados de los dos números menores es igual al cuadrado del número mayor. Los problemas de esta lección se pueden resolver mediante el *teorema de Pitágoras*, cuya expresión matemática se utilizará en la siguiente lección.

Taller de matemáticas

Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10 cm respectivamente. Después, encuentra los puntos medios de cada lado y traza semicírculos con centro en los puntos medios de los lados del triángulo y radios 3, 4 y 5 cm respectivamente, como se muestra en la figura 2.37.

¿Se cumplirá que la suma de las áreas de los semicírculos menores sea igual a la del semicírculo mayor? Para responder esta pregunta lleva a cabo las siguientes actividades.

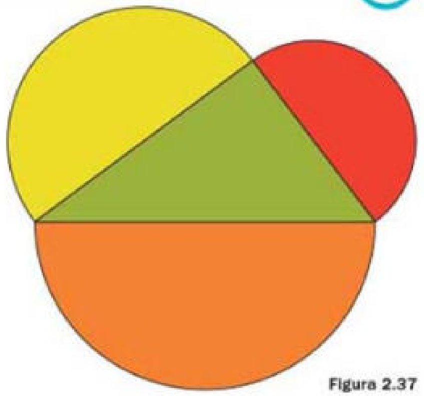


Figura 2.37

1. Nombra cada lado del triángulo y asígnales el valor correspondiente.
2. Identifica el diámetro de cada semicírculo y determina su área. Escribe tus procedimientos a continuación.
   a) Si denominamos al área del semicírculo amarillo *A*, a la del semicírculo anaranjado *N* y a la del semicírculo rojo *R*, calcula N^2.
   b) Ahora calcula $A^2 + R^2$.
   c) ¿Se cumple que $N^2 = A^2 + R^2$? Anota tus procedimientos.
3. Responde la pregunta inicial del problema y argumenta tu respuesta utilizando los conocimientos aprendidos en la lección.
4. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros, verifica si son iguales o si hay diferencia entre ellos. ¿Obtuvieron los mismos resultados? Explica tu respuesta.

TIC a tu alcance

Si te gustaron los tangrams de la actividad inicial, te sugerimos visitar las siguientes páginas electrónicas, en las que encontrarás una aplicación para construir tangrams de diferentes formas:

www.juegoloco.com/juegos/357/Tangram.html
www.juegotangram.com.ar/

Aplicación del teorema de Pitágoras

Introducción

Uno de los fenómenos naturales más impactantes son los sismos. Dichos fenómenos son movimientos de las *placas tectónicas* que "cargan" la corteza terrestre (figura 2.38). Aunque hoy en día no está del todo clara la causa de dichos movimientos, los **sismólogos** creen que se debe a que la corteza se acomoda para liberar energía.

Glosario

Sismólogo. *Es el científico especialista que se encarga de estudiar los sismos y terremotos.*

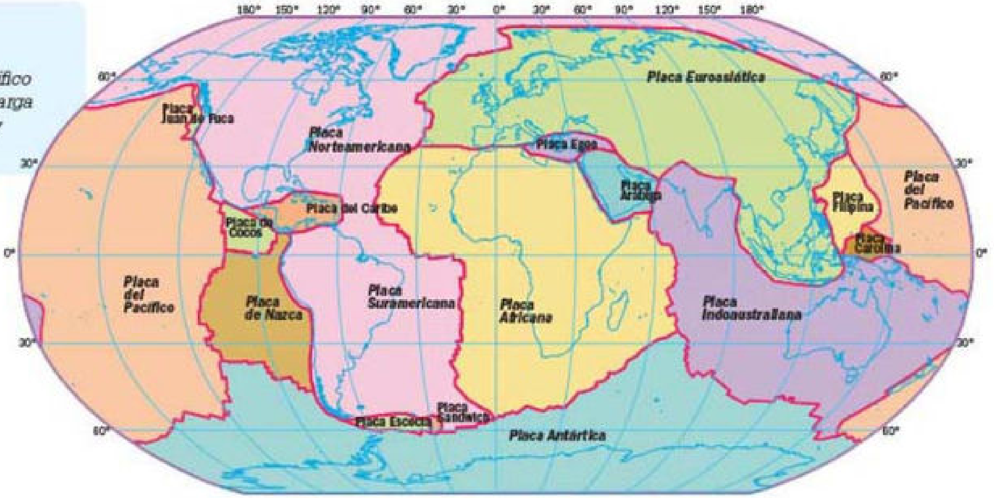


Figura 2.38 Las diferentes placas tectónicas de la Tierra.

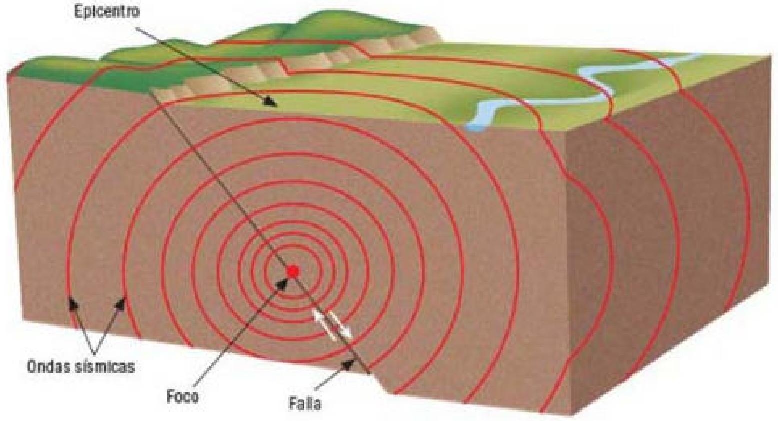


Figura 2.39 Ilustración del epicentro y la propagación de las ondas sísmicas.

El sitio donde se origina un sismo se denomina *foco* y se localiza sobre alguna *falla geológica*, que es el lugar donde las placas tectónicas se unen. El sitio sobre la superficie terrestre que se encuentra directamente sobre el foco se llama *epicentro* (figura 2.39).

¿Sabes cómo calculan los sismólogos la profundidad a la que se encuentra el foco del sismo? Intercambia tus ideas con las de tus compañeros.

Al final de la lección podrán responder la pregunta anterior, así como comparar su respuesta con las ideas que acaban de proponer.

Aplícalo

En una cartulina traza y recorta cinco cuadrados cuyos lados sean de 5, 9, 12, 13 y 15 cm respectivamente. Sobre tu cuaderno forma un triángulo usando tres de ellos a la vez, como se muestra en la figura 2.40, y márcalo con tu lápiz.

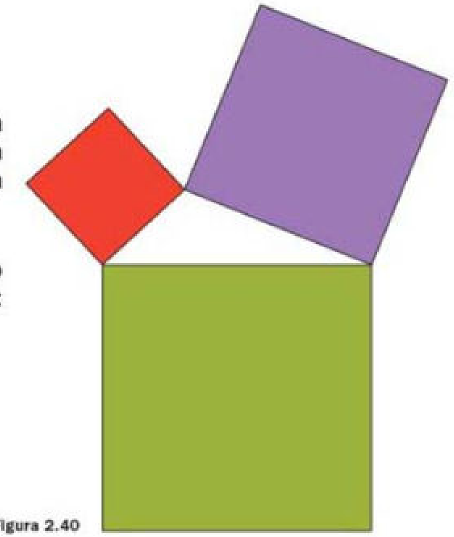


Figura 2.40

1. Con el transportador, en cada caso mide el ángulo del triángulo formado por los cuadrados menores y anótalo en la siguiente tabla:

Medida de los lados	Medidas de los ángulos

a) ¿Encontraste algún caso en que se formara un ángulo de 90°? Si es así, ¿qué medidas tienen sus lados?

b) ¿Tienen alguna propiedad común los triángulos con ángulos de 90°? ¿Cuál?

c) Si tenemos tres cuadrados cualesquiera, ¿qué condición deben cumplir para que podamos construir un triángulo rectángulo cuyos lados midan lo mismo que los lados de cada cuadrado?

Comenta con tus compañeros la relación que existe entre las ternas pitagóricas y los lados de estos triángulos rectángulos, y con ayuda de su docente escriban una conclusión en su cuaderno.

2. Encuentra cinco ternas pitagóricas distintas y con ayuda de las escuadras y el compás traza triángulos con esas medidas; mide el ángulo que forman los lados menores y anótalo en la siguiente tabla:

Terna pitagórica	Medida del ángulo

a) Si construimos un cuadrado en cada lado de estos triángulos, ¿qué relación tienen sus áreas?

b) Establece una relación entre ternas pitagóricas y el ángulo formado por los lados menores al construir un triángulo con esos lados.

Aplícalo

Considera la figura 2.41 y responde lo que se pide.

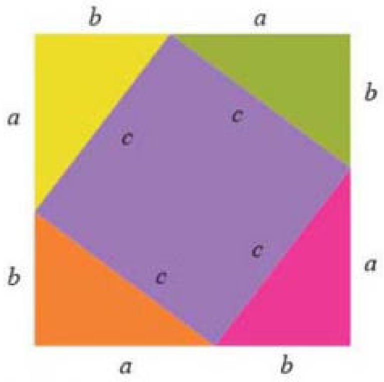


Figura 2.41

1. Si la figura total es un cuadrado, ¿cómo son los ángulos de los triángulos formados por los lados a y b? Explica tu respuesta.

2. Escribe una expresión algebraica que represente el área de cada triángulo.

3. Escribe una expresión algebraica que represente el área del cuadrado grande.

4. Escribe una expresión algebraica que represente el área del cuadrado pequeño.

5. Escribe una expresión algebraica que represente el área ocupada por los cuatro triángulos.

6. Encuentra una expresión algebraica que represente el área del cuadrado grande por medio de las áreas del cuadrado pequeño y los cuatro triángulos.

7. Encuentra una expresión algebraica que represente el área del cuadrado pequeño por medio de las áreas del cuadrado grande y los cuatro triángulos. Explica tu procedimiento.

8. Desarrolla la última expresión que encontraste. ¿La has utilizado antes? Escribe cuándo y cómo lo has hecho.

Compara tus resultados con los de tus compañeros y reflexionen acerca de la última expresión que obtuvieron y su relación con la figura. Con ayuda de su docente escriban una conclusión.

La expresión que obtuviste al final de la actividad anterior es la forma de comprobar si tres números constituyen una terna pitagórica.

Aplícalo

En la siguiente tabla se muestran los valores para los lados de algunos triángulos rectángulos. Completa la tabla y escribe las operaciones que realizaste.

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	Operaciones
9	12		
	72	97	
2	2		

En la siguiente tabla se muestran los lados de algunos triángulos. Verifica cuáles de ellos son rectángulos y escribe las operaciones necesarias para comprobarlo.

Lados	Operaciones	¿Es rectángulo? ¿Por qué?
3, 4 y 5		
7, 10 y 28		
10, 24 y 26		

En parejas, resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

1. Cada mitad de un puente levadizo (figura 2.42) mide 130 m. Si alcanza una altura de 50 m sobre el nivel de la carretera, ¿cuál será la separación entre sus dos mitades? Describan su procedimiento y expliquen cómo lo calcularon.
2. Si tenemos un prisma rectangular cuyos lados miden 3, 4 y 12 cm respectivamente (figura 2.43), ¿cuánto miden sus diagonales? Expliquen cómo lo calcularon.

Figura 2.42

Cierre

Un triángulo con lados a, b y c tales que $a < b < c$, es rectángulo, si y sólo si se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donde c es la hipotenusa y a y b representan los catetos del triángulo.

Si se conocen los dos catetos de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la hipotenusa.

Si se conocen las medidas de la hipotenusa y de un cateto, entonces podemos calcular la medida del otro cateto despejándolo de la ecuación para el teorema de Pitágoras.

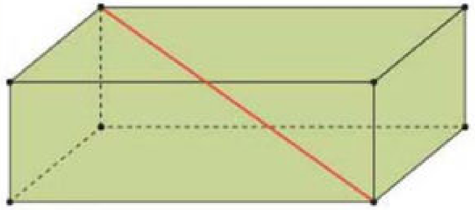


Figura 2.43

Taller de matemáticas

En esta sección retomaremos la actividad de la introducción de la lección, para responder la pregunta planteada.

Las *ondas sísmicas* se pueden clasificar en dos tipos: de compresión, llamadas ondas *P*, y transversales, denominadas S. Las ondas *P* viajan, aproximadamente, con una velocidad entre 8 y 13 $\frac{km}{s}$, y las ondas *S* viajan con una velocidad entre 4 y 8 $\frac{km}{s}$. Esta variación de velocidades se debe al material por el cual tienen que atravesar las ondas. Cuando ambas ondas son detectadas por los **sismógrafos** (figura 2.44), se calcula la diferencia entre los tiempos de llegada (en segundos) y se multiplica por la velocidad de las ondas *P* (en $\frac{km}{s}$) para obtener la distancia (en kilómetros) de la estación sismológica al foco del sismo.

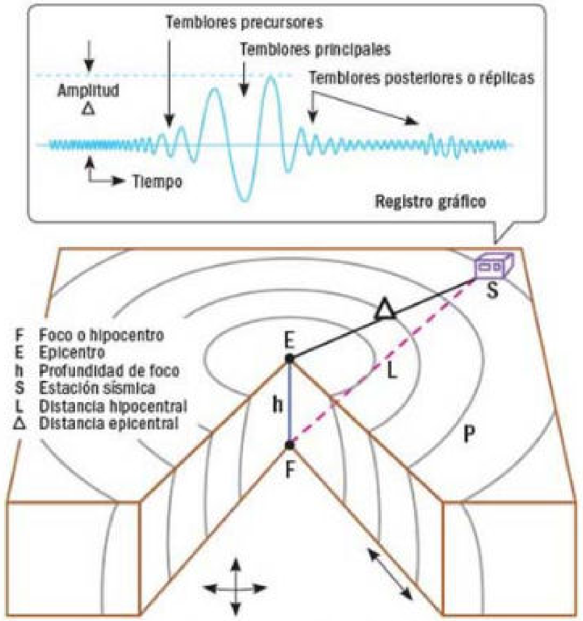


Figura 2.44 Esquema en el que se muestran el epicentro, el foco y la estación sismológica.

Glosario

Sismógrafo. *Instrumento que señala la dirección y la amplitud de los sismos.*

Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre ondas (*S*–*P*)	Velocidad de la onda *P*	Distancia al foco ($d = vt$)
12 s	8.4 $\frac{km}{s}$	
24 s	9.7 $\frac{km}{s}$	
	10.2 $\frac{km}{s}$	112.3 km
17 s		154.7 km

Existen otros dos tipos de ondas sísmicas denominadas *ondas superficiales*, que son las *ondas de Rayleigh* y las *ondas de Love*. Estas ondas se propagan sólo en la superficie de la corteza terrestre a partir del epicentro. La velocidad de las ondas de Rayleigh es, aproximadamente, un 90% de la velocidad de las ondas S, es decir:

velocidad de onda de Rayleigh=0.9 × velocidad de onda *S*

Para encontrar la distancia al epicentro se toma la diferencia de los tiempos de llegada entre las ondas *P* y las ondas de Rayleigh y se multiplica por la velocidad de estas últimas (figura 2.45).

Para encontrar el epicentro del sismo se necesitan al menos tres estaciones sismológicas, ya que al establecer sus distancias al epicentro (en kilómetros) se trazan tres circunferencias, y el punto de intersección de las mismas será el lugar donde se localiza el epicentro.

Figura 2.45 Distancias de las estaciones sismológicas al epicentro.

Completa la siguiente tabla, utilizando la fórmula: $d = vt$

Si es necesario despeja la variable que corresponda al dato que necesites calcular.

Diferencia entre ondas Rayleigh y *P*	Velocidad de la onda Rayleigh	Distancia al epicentro
14 s	7.2 $\frac{km}{s}$	
27 s	6.7 $\frac{km}{s}$	
	6.5 $\frac{km}{s}$	317.8 km
31 s		201.1 km

Para conocer la profundidad del foco podemos aplicar el teorema de Pitágoras, mediante la figura 2.44 de la página 102. Con los datos de las dos tablas anteriores y considerando que cada renglón representa la información sobre un mismo terremoto, completa la siguiente tabla.

Distancia al epicentro (km)	Distancia al foco (km)	Profundidad del foco (km)

Ahora puedes responder a la pregunta final de la actividad de la introducción de la lección.

TIC a tu alcance

Si quieres conocer más acerca de la actividad sísmica, puedes visitar la página del Instituto de Geofísica de la UNAM:
www.geofisica.unam.mx/
En la siguiente página podrás ver una animación en la que se explica brevemente la propagación de las ondas sísmicas:
www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io3/public_html/Ondas/earthquake.swf
En la siguiente página se encuentra un simulador de terremotos:
www.sciencecourseware.org/eec/Earthquake_es/

Probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios

Introducción

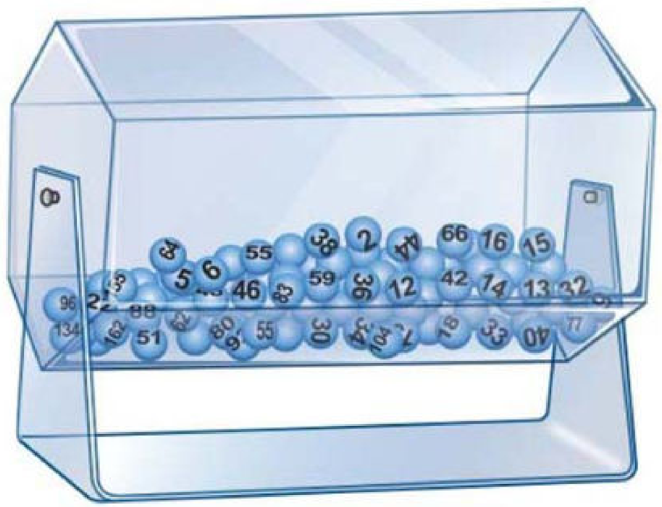


Figura 2.46 Tómbola.

A lo largo de la historia las personas han reaccionado de diferentes maneras ante los juegos de azar; muchas de ellas piensan que la intuición o la suerte pueden actuar a su favor, pero otras han determinado que hay métodos y formas concretas para intentar obtener un número mayor de posibilidades de ganar.

¿Realmente existe la suerte? ¿Qué diferencia hay entre suerte y probabilidad? Analicemos la siguiente situación.

En el juego de **tómbola** la urna contiene esferas numeradas del 1 al 100 (figura 2.46); para obtener los premios se saca una esfera de la urna y el boleto ganador será el que cuente con la siguiente característica: un número par mayor de 90. En parejas, discutan las siguientes preguntas.

Glosario

Tómbola. Rifa pública de objetos diversos, cuyo producto se destina generalmente a fines benéficos.

- ¿Cuál es la probabilidad de triunfo que tiene un boleto con esta condición? ¿Cómo se calcula esta probabilidad?
- ¿Cuántos números pueden obtener el premio ganador?
- ¿Se puede perder si se participa en la rifa?
- ¿Se puede ganar sin participar en la rifa?
- En caso de ganar, ¿sería suerte? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Después, dirigidos por su docente, organicen una lluvia de ideas y en grupo obtengan conclusiones sobre las preguntas anteriores y escríbanlas en su cuaderno.

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente. Por otro lado, dos eventos son complementarios cuando la suma de sus probabilidades es igual a 1 o al 100%; por lo tanto, si dos eventos mutuamente excluyentes abarcan todo el espacio muestral, entonces son complementarios.

Aplícalo

De acuerdo con lo que has aprendido en las lecciones anteriores, responde las siguientes preguntas.

1. En el experimento "lanzar un dado":
   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar? ______
   c) ¿Crees que tus posibilidades de ganar aumentarían si en vez de elegir un número pudieras elegir dos? Explica tu respuesta. ______
2. Para el experimento "lanzar un dado" y el evento "ganar con el 2 o con el 4":
   a) ¿Qué significa que ocurra el 2 o el 4? ______
   b) ¿Aumentaron o disminuyeron las probabilidades de ganar en relación con el hecho de escoger sólo un número? ¿Por qué? ______
3. Hay un juego de cartas en el que se puede ganar si se adivina la carta que se expondrá. Tenemos una baraja inglesa que consta de 52 cartas dividida en 4 palos (picas, corazones, diamantes y tréboles), cada palo está formado por 13 cartas ordenadas de la siguiente forma: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (jack o sota), Q (reina), K (rey), A (as).
   a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se eligen ases o reyes? Explica tu respuesta. ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se elige un jack (sota), una reina o un rey en la misma mano? Explica tu respuesta. ______
   c) Si pudieras elegir dos características diferentes para adivinar qué carta tiene mayor probabilidad de salir en el siguiente lanzamiento, ¿cuáles serían esas características? ______
   d) Calcula cuáles son las probabilidades de que salga la carta con las características que definiste. ______

Compara las características que elegiste con las de tus compañeros del grupo y definan cuál de ellas tiene la probabilidad más alta. ¿Encontraron alguna generalidad para calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes? ¿Cuáles son?

El espacio muestral de un dado es E = {1,2,3,4,5,6}. Si unimos dos eventos mutuamente excluyentes, A = {4} y B = {1,2,3,5,6}, obtenemos el espacio muestral; estos eventos son complementarios y por lo tanto la suma de sus probabilidades es 1.

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ y } P(B) = \frac{5}{6}, \text{ por lo tanto, } P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Aplícalo

En parejas, resuelvan las siguientes actividades.

1. En una caja hay bolitas rojas y negras. La probabilidad de sacar una roja es $\frac{3}{5}$ y se sabe que hay 12 bolitas negras. ¿Cuántas bolitas hay en total? ______

2. En una ciudad, 30% de los alumnos normalmente se trasladan de su casa a la escuela caminando, mientras que 35% lo hace en autobús, ¿cuál es la probabilidad de ir a la escuela de una manera diferente a las mencionadas? ______

3. Una banda de música sinaloense está integrada generalmente por 3 clarinetes, 3 trombones, 3 trompetas, 1 tambora, 1 tarola, 2 saxofones, 1 tuba y 2 vocalistas; si desearas formar parte de esta banda:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que toques un instrumento de percusión? ______

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que seas cantante? ______

   c) ¿Cuál es la probabilidad de tocar un instrumento de viento? ______

   d) ¿Cuál es el resultado de la suma de estas tres probabilidades? ______

   e) ¿Cómo se le llama a este tipo de eventos? ______

Cierre

El cálculo de la probabilidad de ocurrencia en una misma jugada de dos eventos *A* y *B*, siendo mutuamente excluyentes entre sí, quitando la ocurrencia del otro, se indica como *P*(*A*,*B*), y se lee "la probabilidad de que *A* o *B* ocurran en un solo ensayo", y se resuelve mediante una sumatoria entre las probabilidades individuales de cada evento analizado. Se expresa en la siguiente fórmula de la regla de la suma:

$$P(A,B) = P(A) + P(B)$$

Se determina que dos eventos son complementarios si la suma de la probabilidad de ocurrencia de ambos es igual a la unidad:

$$P(A) + P(B) = 1$$

Conocer las formas de calcular la probabilidad en diferentes tipos de eventos nos da un panorama más amplio sobre las posibilidades que tenemos de ganar o perder en los juegos de azar.

Taller de matemáticas

En equipos, calculen la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios para la siguiente situación.

En la huerta de guayabas de doña Elsa se instaló una máquina empacadora que acomoda el producto por calidad y por peso aproximado; durante la primera cosecha se observó que la calidad súper extra tenía una pequeña variación en el peso de las cajas (siendo 20 kg el peso a contener), y se registraron los siguientes datos:

Cantidad de cajas de calidad súper extra	Peso (kg)	Probabilidad de ocurrencia
1 900	20.5	0.22
5 800	20	0.68
890	19.5	0.10

1. A partir de los datos de la tabla anterior, respondan las siguientes situaciones.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de enviar al mercado una caja que no cumpla las especificaciones de peso recomendadas en esta calidad? Expliquen su respuesta.

   ______

   b) La producción total fue de 34 578 cajas y Saúl desea comprarle toda la cosecha a doña Elsa, ¿cuál es la probabilidad de la compradora de obtener calidad súper extra? Expliquen su respuesta.

   ______

   c) Las otras presentaciones se denominan primera y segunda calidad, ¿cuál es la probabilidad de obtenerlas? Expliquen su respuesta.

   ______

   d) ¿A cuántas cajas equivale esta probabilidad? ______

2. A partir de la información planteada sobre la producción de guayabas, diseñen cinco eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios para que se calcule su probabilidad.

Intercambien sus eventos con otro equipo y calculen la probabilidad de los eventos. Comenten los procedimientos que siguieron para calcular las probabilidades.

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

¿Quién fue Pitágoras?

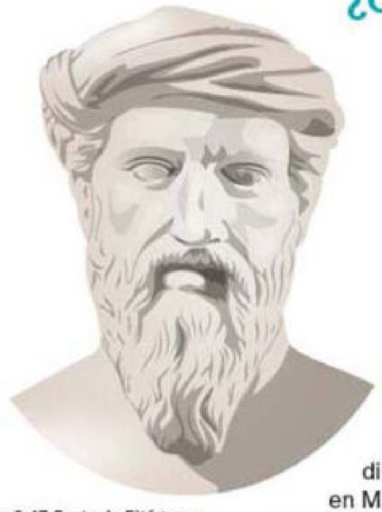


Figura 2.47 Busto de Pitágoras.

Pitágoras nació en Samos (figura 2.47), en la antigua Grecia (572-497 a.n.e.), donde destacó por su "amor al saber" y por el culto al dios Apolo. Pitágoras llegó a ser el centro de una **hermandad** encaminada al perfeccionamiento moral de la sociedad mediante el estudio de la música y las matemáticas, fundando *la escuela pitagórica*. No hay escritos que comprueben la autenticidad de sus enseñanzas en esos tiempos, ya que eran **orales**, pero queda el testimonio de los participantes de su escuela. Entre los estudios más importantes que realizó se encuentran los siguientes: el *número pitagórico*, el *objeto pitagórico*, el *Teorema de Pitágoras* y los *números* **inconmensurables**; cada uno de ellos trajo consigo una revolución matemática.

Cuenta la tradición que cuando se originó el Teorema de Pitágoras en su generalidad geométrica abstracta, se sacrificaron cien bueyes a los dioses en señal de gratitud. Los trabajos en su orden lo llevaron al exilio en Metaponto (actual municipio italiano de Bernalda, en la provincia de Matera) donde permaneció hasta su muerte.

Glosario

Hermandad. *Agrupación de personas para determinado fin. Privilegio que a una o varias personas concede una agrupación para hacerlas, por este medio, partícipes de ciertas gracias y privilegios.*

Oral. *Que se manifiesta o produce con la boca o mediante la palabra hablada.*

Inconmensurable. *Que no se puede medir.*

El Teorema de Pitágoras

"El teorema de Pitágoras es un activo cultural de primer orden que pertenece a la base intelectual común de la humanidad. [...] Es con razón un símbolo de todas las Matemáticas".

(Artmann, B., 1996. *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer. New York. p. 57).

"El Teorema de Pitágoras ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente".

(Dunham, W., 1995. *El Universo de las Matemáticas*. Pirámide, 1995. Cap. H. p. 136).

Podemos decir que el Teorema de Pitágoras es sin duda la relación matemática más conocida y popular en muchas de las civilizaciones a lo largo de la historia; la que más atención y pruebas ha recibido a lo largo de los siglos. Es un teorema que ha causado admiración a todas las personas, matemáticos y no matemáticos, pero también una gran extrañeza y perplejidad a personalidades de la historia como Leonardo da Vinci, el filósofo alemán Arthur Schopenhauer (1788-1880) y el físico alemán Albert Einstein (1879-1955), entre otros.

El Teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones prácticas, entre ellas una muy simple, pero a la vez compleja, como lo es el mismo teorema: ¿cómo asegurarnos que una pared está cuadrada con el piso? La respuesta nos la ofrecería casi cualquier albañil, para ello es necesario tener a la mano tres cuerdas de medidas 3, 4 y 5 unidades; acomodar la de 3 en la pared, la de 4 en el piso y si la cuerda de 5 unidades queda unida exactamente sobre los extremos de las anteriores significa que la pared quedó bien construida, en caso contrario ha quedado descuadrada.

¿Qué relación existe entre la música y la matemática?

Es común escuchar que "hay matemática en la música porque cuando se abre una partitura, ésta está llena de numeritos", es decir, de los números del compás y las digitaciones. Una parte de las matemáticas estudia los números, sus patrones y formas, y estos elementos son inherentes a la ciencia, la composición y la ejecución de la música.

Tomado y adaptado de:
www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p1.html, (Consulta: 9 de marzo de 2013).

Los teoristas de música frecuentemente utilizan matemáticas para comprender la música. De hecho, matemáticas es "la base del sonido" y del sonido mismo "en sus aspectos musicales... exhibe una apreciable gama de propiedades numéricas", simplemente porque en sí la Naturaleza es "sorprendentemente matemática". Aunque se sabe que los antiguos chinos, egipcios y mesopotamos estudiaron los principios matemáticos del sonido (Reginald Smith Brindle, *The New Music*, Oxford University Press, 1987, pp. 42-43), son los pitagóricos de Grecia antigua quienes fueron los primeros investigadores de la expresión de las escalas musicales en términos de proporcionalidad numérica (Plato, *The Republic*, Harmondsworth Penguin, 1974, p. 340, nota).

Tomado y adaptado de:
www.etceter.com/c-conocimiento/p-musica-y-matematicas/, (Consulta: 9 de marzo de 2013).

Las matemáticas y la música, transformaciones geométricas aplicadas

La música y la matemática tienen una relación directa, aunque ninguna depende directamente de la otra, la matemática tiene una influencia directa en la evolución de la teoría musical. Hablar de cohesión en un pieza musical se refiere a la afirmación de secuencias de sonidos en forma variada, con lo que se pretende que las piezas no sean monótonas y se le dé carácter a las notas, algunas técnicas de composición surgieron del análisis de la geometría.

Figura 2.48 Las partituras son textos de una composición musical correspondiente a cada uno de los instrumentos que la ejecutan, en ella se dibujan las notas musicales.

Las transformaciones musicales están íntimamente relacionadas a las transformaciones geométricas básicas, como la rotación, la traslación y la reflexión. La transformación geométrica tiende a buscarle un nuevo lugar en el plano a una figura rígida, pero conserva en muchas ocasiones la forma y el tamaño; de igual manera, en la música existen conjuntos de notas que se repiten de forma idéntica o en algunas ocasiones más agudas o graves, en otras ocasiones en lugar de subir, bajan o retroceden (figura 2.48). En la música popular se encuentran estas figuras, rotación, traslación y reflexión, y si nos detenemos a analizar y buscarlas en obras de grandes autores seguramente ahí estarán (Vallejo López, F. 2011. *Las matemáticas: sus distintas aplicaciones*. Revista Digital Ciencia y Didáctica. Enfoques Educativos. Número 49).

Tomado y adaptado de:
www.enfoqueseducativos.es/ciencia/ciencia_49.pdf#page=96, (Consulta: 9 de marzo de 2013).

TIC a tu alcance

Si quieres leer más acerca de la relación entre las matemáticas y la música, visita las páginas:

www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p1.html

www.etceter.com/c-conocimiento/p-musica-y-matematicas/

EVALUACIÓN TIPO PISA

Lee las siguientes situaciones y resuélvelas.

El gobierno municipal de Apozol, con la intención de mejorar la infraestructura de comunicaciones, pretende construir un camino de terracería lo más recto posible entre San Miguel y El Ayo.

Figura 2.49 Mapa del estado de Zacatecas. Coordinación General de Planeación y Centros. SCT.

Población	Distancia (km)
Apozol (D) - San Miguel (C)	7.2
Apozol (D) - El Ayo (E)	12.9

Utiliza la información de la figura 2.49 para resolver las siguientes situaciones.

1. ¿Cuál es la distancia mínima que tendría dicho camino? Escribe tu procedimiento.

2. Otro proyecto que están implementando en este municipio es la plantación de frambuesa en una zona rectangular, se pretende apoyar a los productores con malla ciclónica para delimitar su propiedad, pero se desconocen las medidas de sus lados; sabiendo que su área está dada por la ecuación $x^2 + 3x = 10$, calcula la longitud de cada lado y el perímetro total (cada unidad corresponde a 1 km.). Escribe tu procedimiento.

3. Al aplicar una rotación geométrica de 180° en el sentido horario al triángulo CDF (figura 2.49), a partir del punto D, ¿qué comunidad está dentro del triángulo imagen? Escribe tu procedimiento.

En la secundaria federal "Rafael Ramírez Castañeda" los alumnos de 3° año crearon "La tómbola de la suerte", un juego que ofrece diferentes premios semanalmente. La semana próxima se rifarán muñecos clásicos de lucha libre. Carlos decidió participar, pues todos los números son premiados, pero su decisión la tomó después de enterarse de que los muñecos de sus personajes favoritos estarán entre los premios.

La gráfica 2.50 representa la cantidad de muñecos que hay por personaje para las premiaciones.

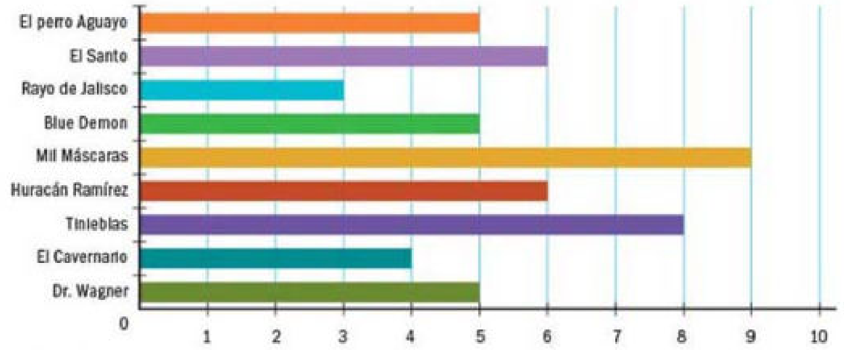


Figura 2.50

1. Responde las siguientes preguntas. Escribe tu razonamiento.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos obtenga un muñeco de su agrado, de El Santo o de Blue Demon?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos obtenga uno de los que menos le gustan, Dr. Wagner o El Cavernario?

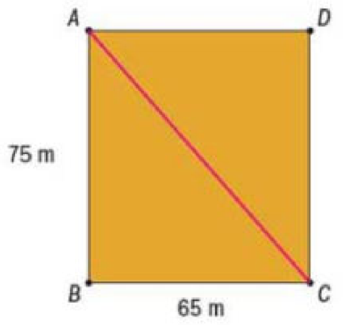
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos obtenga un muñeco que le sea indiferente?

EVALUACIÓN TIPO ENLACE

Subraya la opción correcta para cada reactivo.

1. Una de las nuevas remodelaciones de la plaza de la Constitución rectangular del municipio, incluye el trazo de una diagonal con cantera rosa sobre el piso, uniendo los extremos *A* y *C*; se sabe que la longitud del lado *AB* corresponde a 75 m, mientras que la del lado *BC* es de 65 m. ¿Cuántos metros lineales de cantera se necesitan para cubrir la diagonal trazada?

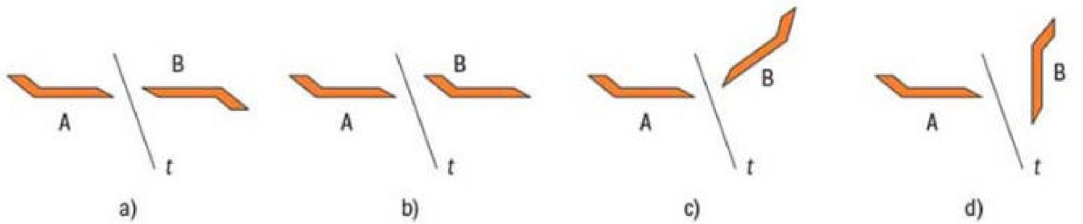
   a) 16.73 m
   b) 75 m
   c) 99.24 m
   d) 37.41 m



2. El número de pedidos de medicamento en un hospital se puede expresar mediante la ecuación $x^2 - 9x + 18 = 0$. ¿Cuál es la factorización correcta de esta ecuación?

   a) $(x - 9)(x - 2)$ b) $(x - 3)(x + 6)$ c) $(x - 3)(x - 6)$ d) $(x + 3)(x - 6)$

3. En los siguientes pares de figuras, identifica en cuál es la reflexión de la figura A respecto a la recta t, representada por la figura B.

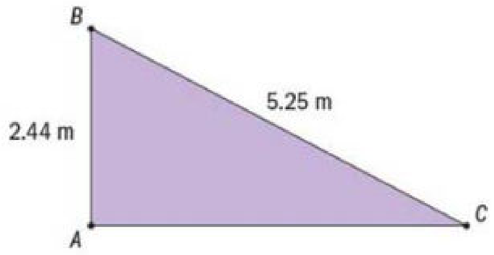


4. Arturo decide participar en un sorteo donde una urna cerrada contiene bolas de diferentes colores, 13 azules, 15 naranjas, 17 rosas, 12 verdes, y 9 amarillas; si saca una bola sin ver, ¿cuál es la probabilidad de que el color sea verde o amarillo?

   a) $\frac{6}{33}$ b) $\frac{9}{66}$ c) $\frac{9}{12}$ d) $\frac{21}{66}$

5. Edmundo construyó una escalera con una longitud de 5.25 m para subir a la segunda planta de su casa, como lo muestra la ilustración; la altura correspondiente de la pared es de 2.44 m, él quiere poner piso entre la escalera y la pared, ¿cuántos metros lineales necesita?

   a) 4.64 m
   b) 3.92 m
   c) 2.37 m
   d) 5.78 m



EVALUAR PARA APRENDER

Completa la siguiente tabla, para ello reflexiona sobre cada indicador de aprendizaje del bloque.

Aspectos a evaluar	¿Qué hice para lograrlo?	¿A qué dificultades me enfrenté?
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones.		
Resuelvo ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización.		
Analizo las propiedades de rotación y traslación de las figuras.		
Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.		
Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.		
Explico y uso el teorema de Pitágoras.		
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios.		

Valora tus actitudes para el trabajo en equipo. Responde en tu cuaderno.

a) ¿Cómo fue mi participación durante las actividades colaborativas?

b) ¿Qué actitudes y valores puse en práctica al emitir opiniones y escuchar las de mis compañeros?

c) Solicita a tu docente que escriba algunas sugerencias para ayudarte a lograr los aprendizajes esperados y a mejorar tus actitudes en el trabajo en equipo, así como tu tolerancia e inclusión de tus compañeros en las actividades escolares.

d) Solicita a uno de tus padres o a tu tutor que lea tu autoevaluación y los comentarios de tu docente. Pide que te escriba algunas recomendaciones para mejorar tu proceso de aprendizaje. Asimismo, si es necesario, que escriba algún comentario para tu docente.

B3

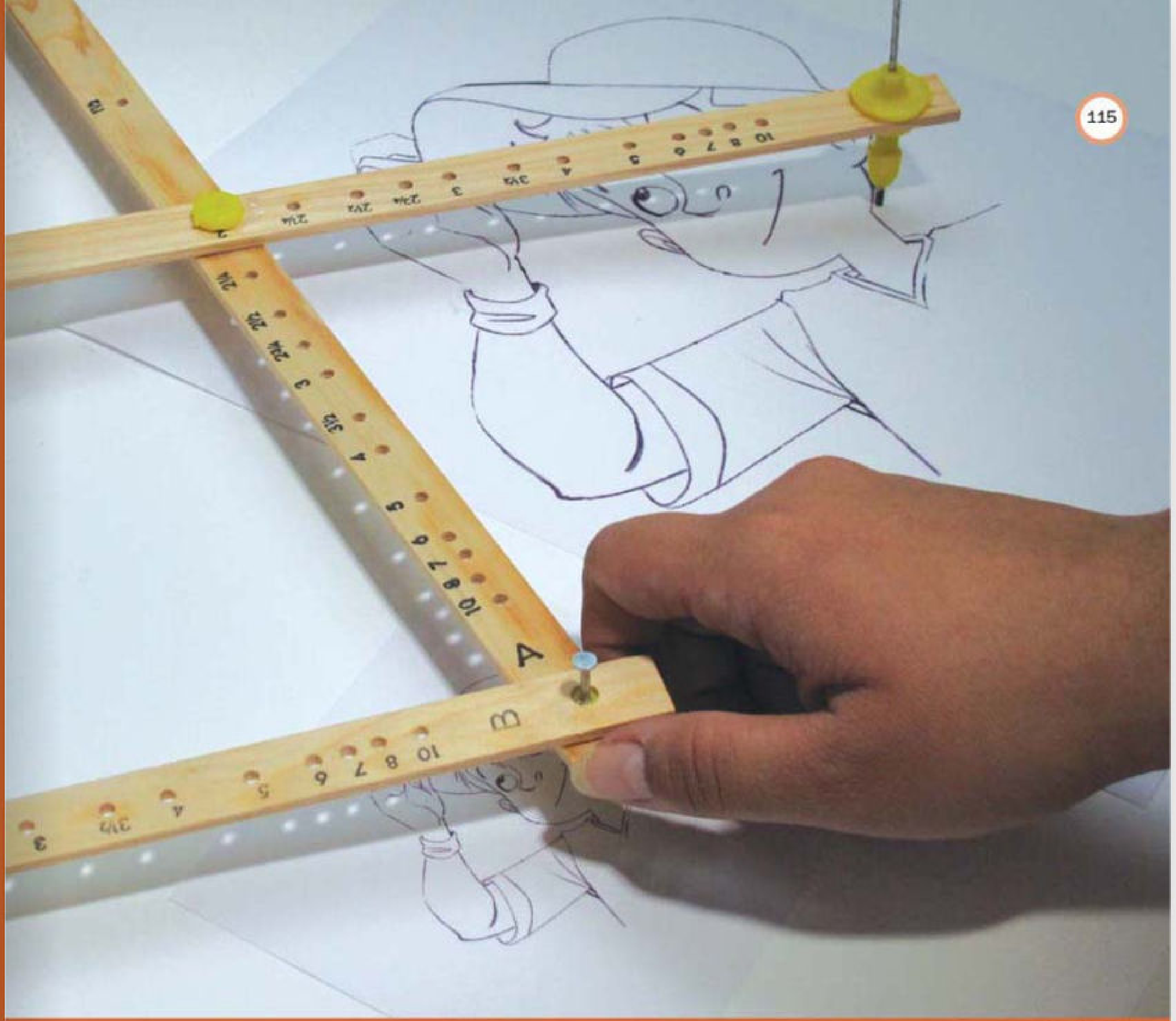
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

EJES	TEMAS
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. • Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. • Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera. **Nociones de probabilidad** • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).



Pantógrafo.

¿Sabías que existe un aparato con el que puedes copiar a escala cualquier dibujo que tengas en papel? Se llama pantógrafo y es un instrumento de dibujo construido con varillas articuladas que permite hacer ampliaciones o reducciones utilizando las propiedades de la homotecia para conservar las proporciones entre el dibujo original y su copia.

¿QUÉ TANTO SABES?

Esta sección está diseñada para que reconozcas lo que has aprendido en tus cursos anteriores de Matemáticas, y que ahora utilizarás para comprender los temas de este bloque.

1. De las siguientes expresiones matemáticas, determina cuál es la que representa mejor el enunciado: "El triple del cuadrado de un número es igual a la suma del doble del número original más 5".

   a) $3(2x) + 5 = x$ b) $3(x^2) = x^2 + 5$ c) $3x^2 = 2x + 5$ d) $2x^2 = 3x + 5$

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular el área del rectángulo rojo en la figura 3.1?

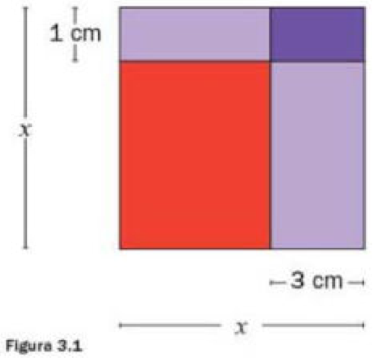


Figura 3.1

   a) $A = x^2 - 3x - 1$

   b) $A = x^2 - x - 3$

   c) $A = x^2 - 4x + 3$

   d) $A = x^2 - 3 - 1$

   e) $A = x^2 - 2x + 3$

3. María trabaja en un laboratorio que estudia el comportamiento de las poblaciones de cierto tipo de hormigas. La población *P* de hormigas que María está estudiando crece de acuerdo con la ecuación:

$$P = d^2 + 4d - 4$$

   daonde *d* es el número de días transcurridos.

d (días transcurridos)	*P* (número de hormigas)
7	
2	
4	
	41
3	
6	
	1

   a) Con base en la ecuación anterior completa la tabla.

   b) ¿Qué tipo de relación matemática existe entre los días transcurridos y la población de hormigas? ________

   c) Explica cómo llegaste a esta conclusión.

   d) Compara tu respuesta con la de tus compañeros, ¿es diferente? ¿Por qué? ________

4. En el hexágono que se muestra en la figura 3.2 hay seis triángulos de colores.

   a) Si queremos poner el triángulo rojo sobre el azul por medio de una rotación con centro en el centro del hexágono, ¿de cuántos grados y en qué dirección debe aplicarse dicha rotación?

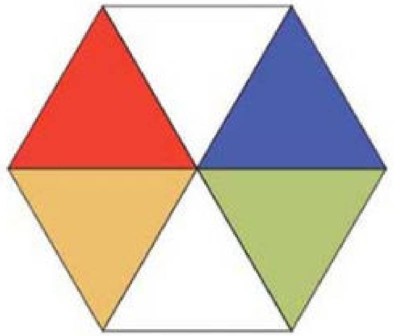


Figura 3.2

5. Traza una línea en el hexágono de modo que al reflejarlo a lo largo de dicha línea se intercambien los triángulos blancos.

   a) ¿La línea pasa por el centro del hexágono?

   b) ¿Por qué crees que sea así? Explica tu respuesta.

6. Utilizando tus escuadras, mide las diagonales del rectángulo de la figura 3.3.

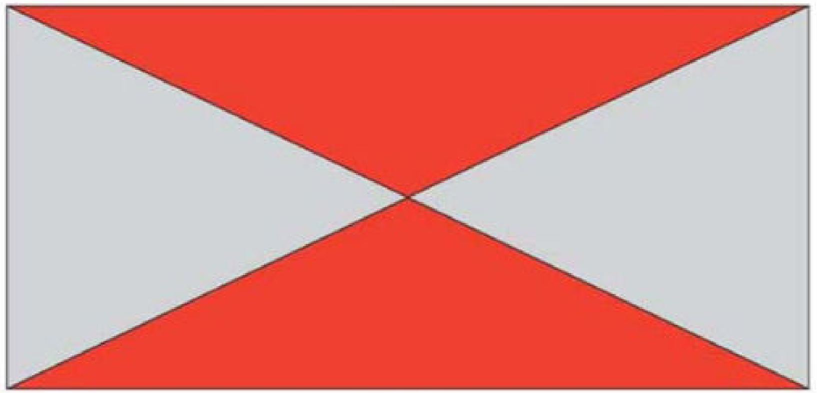


Figura 3.3

   a) ¿Sus diagonales miden lo mismo? ¿Por qué?

   b) De acuerdo con el teorema de Pitágoras, ¿cuánto miden las diagonales?

   c) ¿Los triángulos rojos son congruentes o semejantes? Justifica tu respuesta.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general

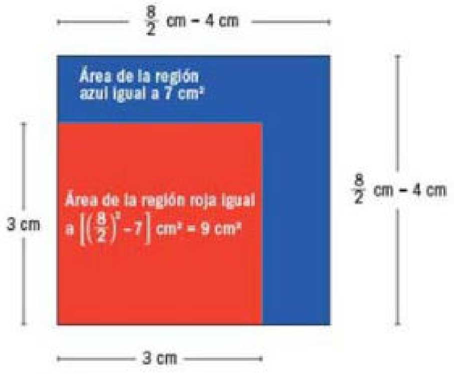


Figura 3.4

Introducción

Las *ecuaciones cuadráticas* han sido estudiadas por los matemáticos del mundo desde hace ya varios siglos. En Babilonia, China, la India y Grecia se buscaban procedimientos geométricos para determinar soluciones para cierto tipo de ecuaciones cuadráticas. En esta lección estudiaremos un método para obtener las soluciones que tiene la ecuación cuadrática de la *forma general*:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primero vamos a resolver la ecuación cuadrática $8x - x^2 = 7$ mediante el método geométrico. Para ello consideremos un cuadrado de lado $\frac{8}{2} = 4$ cm en el que inscribimos un cuadrado más pequeño de área igual a $\left[\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7\right] = 9$ cm², tal como se muestra en la figura 3.4.

La región azul tiene un área igual a 7 cm², pues el área del cuadrado grande es igual a $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ cm². Si reacomodamos la región azul del cuadrado de la figura 3.4 como se muestra en la figura 3.5, y agregamos al rectángulo que resulta un cuadrado de lado $\left(\frac{8}{2} - 3\right) = 1$ cm (figura 3.6), obtenemos un rectángulo de área $8 \cdot \left(\frac{8}{2} - 3\right) = 8$ cm².

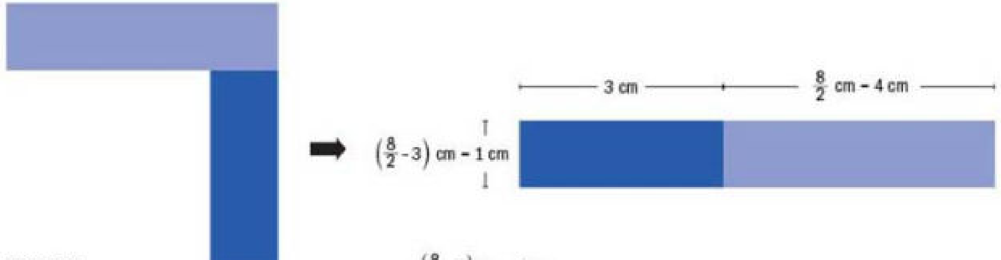


Figura 3.5

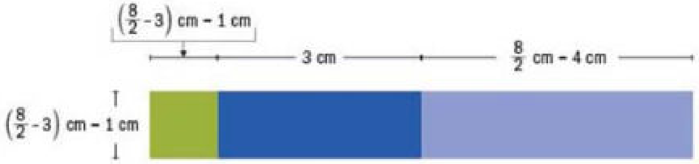


Figura 3.6

El área de la región azul de la figura 3.5 es igual al área del rectángulo de base 8 cm y altura $\left(\frac{8}{2} - 3\right) = 1$ cm de la figura 3.6 menos el área del cuadrado verde:

$$8\left(\frac{8}{2} - 3\right) - \left(\frac{8}{2} - 3\right)^2 = 7$$

Por lo tanto, $x = \left(\frac{8}{2} - 3\right) = 1$ es una solución de la ecuación $8x - x^2 = 7$.

¡Verifícalo sustituyendo el valor en la ecuación!

Mostremos con el mismo método que $x = \frac{8}{2} + 3 = 7$ también es una solución de la ecuación $8x - x^2 = 7$. Para ello consideremos un cuadrado de 8 cm de lado con otro cuadrado inscrito en él de área igual a $\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7 = 9$ cm², como el de la figura 3.7.

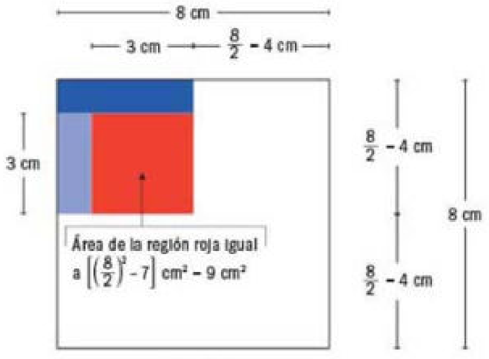


Figura 3.7

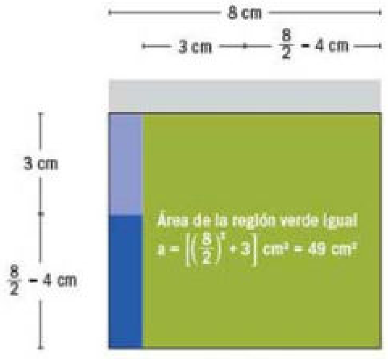


Figura 3.8

Reacomodamos la región azul que tiene un área de 7 cm² (figura 3.8) y al área del rectángulo de base 8 cm y altura $\frac{8}{2} + 3 = 7$ cm le restamos el área de la región verde:

$$8 \cdot \left(\frac{8}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{2} + 3\right)^2 = 7$$

Por lo tanto $x = \frac{8}{2} + 3 = 7$ es otra solución de la ecuación $8x - x^2 = 7$. ¡Verifícalo sustituyendo este nuevo valor en la ecuación!

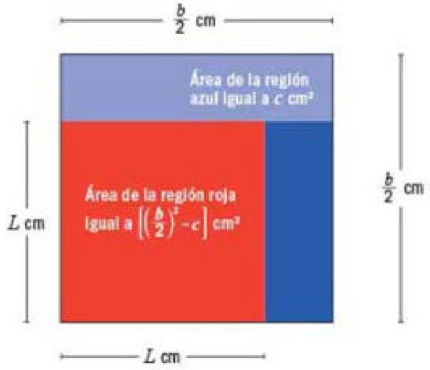


Figura 3.9

El método anterior es válido para resolver cualquier ecuación cuadrática de la forma $bx = x^2 + c$, siempre que b, c y $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$ sean números mayores que cero.

Veamos otro ejemplo. Consideremos un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$ cm (figura 3.9), con un cuadrado inscrito de área igual a $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$ cm², es decir, un cuadrado de lado L cm donde: $L^2 = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$

Si reacomodamos la región azul agregándole un cuadrado de lado $\left(\frac{b}{2}^2 - L\right)$ cm (figura 3.10), obtenemos un rectángulo de base b cm y altura $\left(\frac{b}{2}^2 - L\right)$ cm.

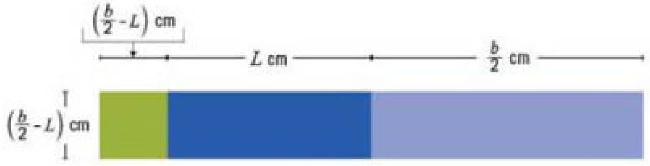


Figura 3.10

Calculando el área de este rectángulo como la suma del área del cuadrado verde más el área de la región azul, obtenemos:

$$b\left(\frac{b}{2}^{2}-L\right)=\left(\frac{b}{2}-L\right)^{2}+c$$

Por lo tanto, $x=\frac{b}{2}-L$ es una solución de la ecuación cuadrática $bx = x^2 + c$, donde L es un número que cumple: $L^2=\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\right]$

Ahora comprobemos que $x=\frac{b}{2}+L$ también es una solución de la misma ecuación. Para ello consideremos un cuadrado de lado b cm en el que hay inscrito un cuadrado de área igual a $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\right]$ cm² (figura 3.8). Por lo tanto, en la figura 3.11, L es un número cuyo cuadrado es igual a $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\right]$.

Ahora reacomodemos la región azul del cuadrado de la figura 3.11 como se muestra en la figura 3.12.

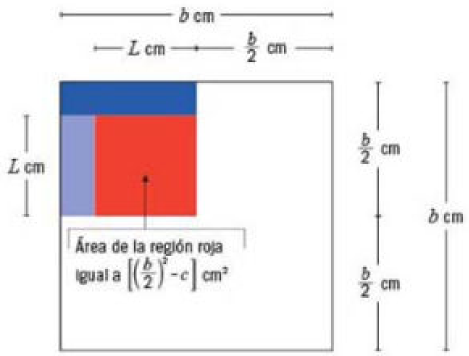


Figura 3.11

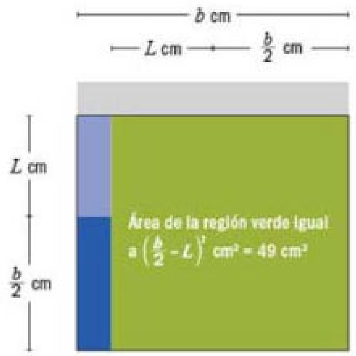


Figura 3.12

Así, obtenemos una descomposición en dos regiones del rectángulo de base b cm y altura $\left(\frac{b}{2}+L\right)$ cm, una región azul de área c cm² y una región verde de área $\left(\frac{b}{2}+L\right)^2$ cm², y al comparar las áreas tenemos:

$$b\left(\frac{b}{2}+L\right)=\left(\frac{b}{2}+L\right)^{2}+c$$

Por lo tanto, $x=\left(\frac{b}{2}+L\right)$ es otra solución de la ecuación $bx = x^2 + c$.

Las soluciones de una ecuación si b, c y $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\right]$ son números positivos, las soluciones de una ecuación de la forma $bx = x^2 + c$ son:

$$x_1=\frac{b}{2}-L \quad \text{y} \quad x_2=\frac{b}{2}+L$$

donde L es el lado de un cuadrado de área igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$, es decir, $L^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$.

Aplícalo

En tu cuaderno, resuelve las ecuaciones cuadráticas de acuerdo con el método solicitado.

1. Utiliza el método geométrico para resolver las siguientes ecuaciones.
   a) $10x = x^2 + 9$ b) $10x = x^2 + 16$
2. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando las fórmulas: $x_1=\frac{b}{2}-L$ y $x_2=\frac{b}{2}+L$
   a) $8x = x^2 + 12$ b) $4x = x^2 + 3$ c) $12x = 3x^2 + 9$
   d) $16x = x^2 + 15$ e) $14x - x^2 = 49$ f) $6x = x^2 + 5$

Soluciones de la ecuación general de segundo grado

Por tratarse de ecuaciones de segundo grado, las ecuaciones cuadráticas tienen, a lo más, dos soluciones o raíces. Sin embargo, el número de soluciones de una ecuación cuadrática puede variar de acuerdo con los valores de los *coeficientes cuadrático* y *lineal* y del *término independiente*.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, porque el cuadrado de cualquier número siempre es positivo. Sin embargo la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como única solución $x = 1$, porque: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$.

En este caso se dice que la ecuación tiene una solución o *raíz doble*. Pero también hay ecuaciones cuadráticas que tienen dos soluciones, como la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

A continuación describiremos un método que nos permite saber cuándo una ecuación cuadrática tiene soluciones y cómo determinarlas.

Dada una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, el número $b^2 - c$ se conoce como el *discriminante* de la ecuación cuadrática. Obteniendo el valor numérico del discriminante, tenemos tres posibilidades (figura 3.13):

Valor del discriminante	Número de soluciones de la ecuación	Soluciones
$b^2 - ac < 0$ (número negativo)	No tiene soluciones	--------
$b^2 - ac = 0$	Una única solución	$x=-\frac{b}{2a}$
$b^2 - ac > 0$ (número positivo)	Dos soluciones	$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

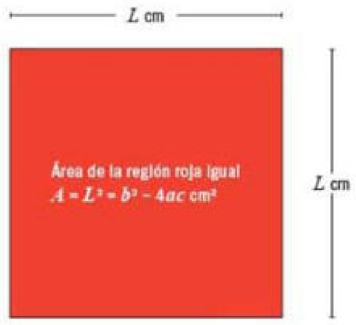


Figura 3.13

Resolvamos algunos ejemplos.

- Consideremos la ecuación cuadrática $x^2 - x + 5 = 0$, y asignemos los valores de los coeficientes y del término lineal: $a = 1$, $b = -1$ y $c = 5$

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19,\ b^2 - 4ac < 0$$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 - x + 5 = 0$ no tiene soluciones. ¡Intenta encontrar alguna!

- Busquemos ahora las soluciones de la ecuación $x^2 + 10x + 25 = 0$

En este caso $a = 1$, $b = 10$ y $c = 25$, entonces:

$$b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(25) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 + 10x + 25 = 0$ tiene exactamente una solución: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2} = 5$. ¡Comprueba que dicho valor es una solución!

- Ahora busquemos las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 6 = 0$

En este caso $a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$, entonces:

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25, \quad b^2 - 4ac > 0$$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ tiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

Según el criterio que hemos descrito, la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ tiene las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{[-(-1) + 5]}{2(1)} = \frac{1 + 5}{2} = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{[-(-1) - 5]}{2(1)} = \frac{1 + 5}{2} = -2$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación original como un producto de sus factores:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Cierre

Para hallar las soluciones de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos utilizar las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las fórmulas anteriores se pueden simplificar y escribir como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula general* para resolver ecuaciones cuadráticas y el valor del discriminante de la raíz, $b^2 - 4ac$, determina el número de soluciones de la ecuación. Una vez encontradas las soluciones de una ecuación cuadrática, ésta se puede escribir como el producto de sus factores.

Taller de matemáticas

1. Calculando el valor del discriminante, determina cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones.

Ecuación	$b^2 - 4ac$	Número de soluciones
$9x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9} = 0$		
$2x^2 - 2 = 0$		
$3x^2 - 6x - 24 = 0$		
$5x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{5}{2} = 0$		
$\frac{1}{2}x^2 + 6x + 18 = 0$		

2. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.
   a) $x^2 + x - 6 = 0$ ____________
   b) $x^2 - 1 = 0$ ____________
   c) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ____________
   d) $x^2 + x - 6 = 0$ ____________
   e) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ ____________

3. Utiliza las soluciones que encontraste para factorizar las ecuaciones como un producto de sus factores.
   a) ____________
   b) ____________
   c) ____________
   d) ____________
   e) ____________

4. Plantea un problema que se resuelva encontrando las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ y determínalas.

____

____

____

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Figura 3.14 Parte final de un aterrizaje.

Introducción

¿Alguna vez has visto o experimentado el aterrizaje de un avión? (figura 3.14). Dicha operación depende de ciertas variables, como la **altitud**, la velocidad e inclinación del avión y la velocidad del viento, entre otras.

La parte final de un aterrizaje tiene dos fases: el planeo y la inclinación. La primera fase empieza con el descenso y termina cuando se inicia la inclinación, y la segunda va desde que se alza la nariz del avión hasta que el tren de aterrizaje principal toca el suelo. El *ángulo de descenso* lo forman la pista y la línea que une a la punta del avión con un punto de referencia en la misma pista.

Glosario

Altitud. *Región del aire a cierta altura sobre la superficie terrestre.*

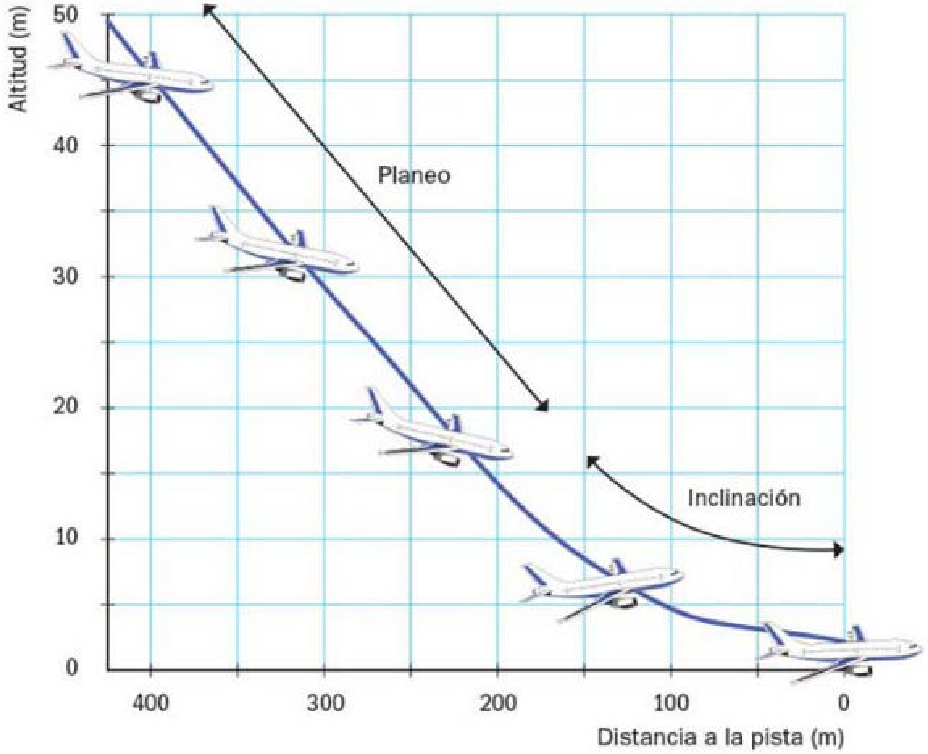
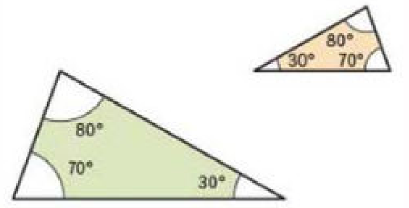
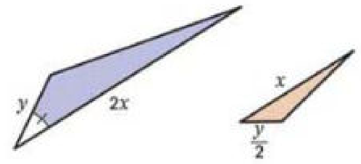
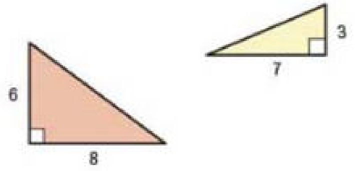
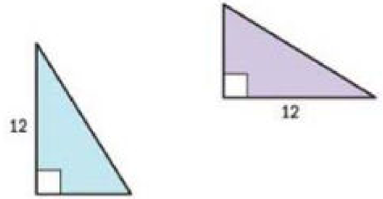
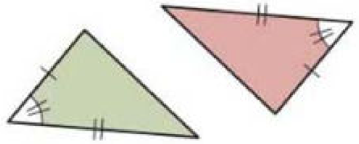


Figura 3.15 Planeo e inclinación de un avión durante el aterrizaje.

Si el ángulo de descenso no varía, ¿cómo están relacionadas la altura a la que vuela el avión y su distancia a la pista? Analícenlo en grupo (figura 3.15).

Aplícalo

Analiza las siguientes figuras y explica si son congruentes o semejantes, o si no se cuenta con información suficiente.

Recuerda que los criterios de semejanza y congruencia permiten determinar si dos figuras son congruentes o semejantes, dependiendo de los datos con que se cuente.

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen y resuelvan las siguientes actividades.

1. En la figura 3.16 se muestra una sucesión de triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 40 cm, mientras que la base mide 48 cm. A partir de la figura A se construyen las figuras consecutivas, encontrando los puntos medios de los lados de los triángulos anaranjados. Analicen la sucesión de figuras y respondan las preguntas.

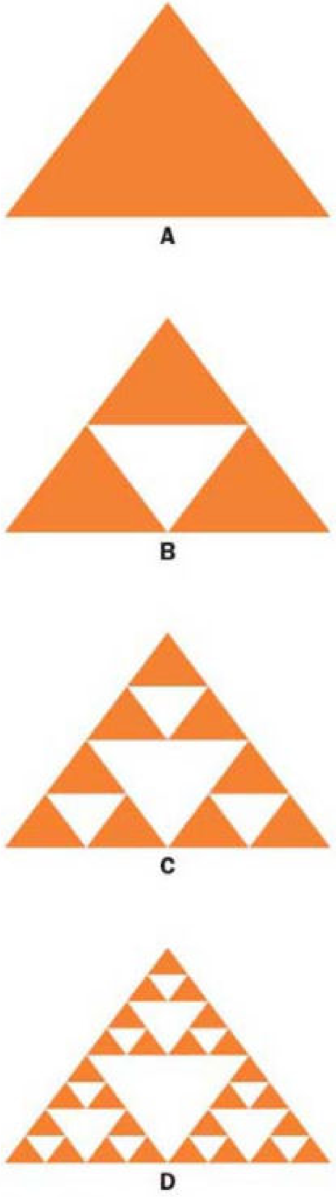


Figura 3.16

a) Argumenten por qué los tres triángulos anaranjados y el blanco que aparecen en la figura B son congruentes.

b) ¿Cuál es la razón de los lados del triángulo blanco de la figura B, con el triángulo de la figura A?

c) ¿Cuál es la razón de los lados de los triángulos blancos de la figura C?

d) ¿Cuál es la razón de los lados de los triángulos más pequeños de la figura C con respecto al triángulo de la figura A?

e) ¿Cuál es la razón de las áreas del triángulo blanco de la figura B con el triángulo de la figura A?

f) ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos blancos de la figura C?

g) ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos más pequeños de la figura C con respecto al triángulo de la figura A?

Comparen sus procedimientos y resultados con sus compañeros y con ayuda de su docente escriban en su cuaderno conclusiones generales.

Aplícalo

En parejas, analicen y resuelvan las siguientes actividades.

1. En la figura 3.17 se muestran dos triángulos rectángulos superpuestos, donde los lados *AB* y *EF* son paralelos.

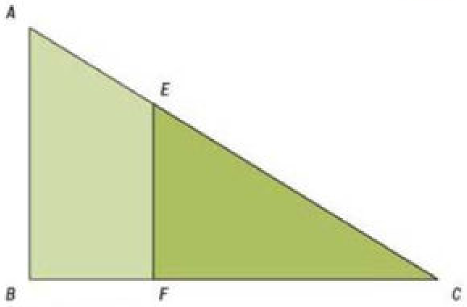


Figura 3.17

a) Los triángulos *ABC* y *EFC*, ¿son congruentes o semejantes? ¿Por qué?

b) Si $AB = 11$, $BC = 60$ y $AC = 61$, y sabemos que $EC = \frac{3}{4}AC$, ¿cuánto miden *EF* y *FC*?

c) Si $BF = 4$, $FC = x$, $AC = 2x + 2$ y $EC = 5$, ¿cuánto miden los lados de ambos triángulos?

d) Si $EF = x$, $FC = x + 1$, $EC = x + 2$ y $BF = x - 1$, ¿cuánto miden los lados de ambos triángulos?

2. Don Pedro tiene un terreno formado por un rectángulo y un triángulo rectángulo, y está dividido en tres partes. En la figura 3.18 se muestra el terreno y sus medidas.

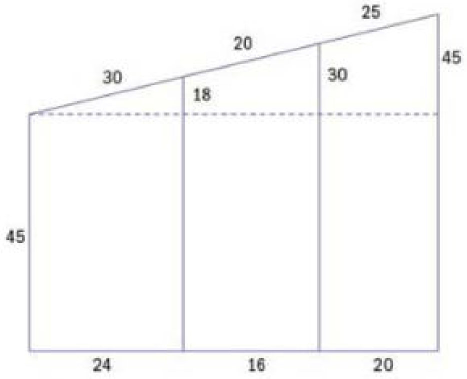


Figura 3.18

a) En la figura hay tres triángulos semejantes, dibújenlos por separado en su cuaderno.

b) ¿Cuáles son los criterios para argumentar la semejanza entre estos triángulos?

c) Escriban las proporciones para todos los pares de triángulos semejantes.

d) Determinen las áreas de los tres triángulos semejantes.

e) Determinen el área del rectángulo y el área total del terreno.

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen y resuelvan los siguientes planteamientos.

1. El proceso de aterrizaje de un avión requiere de una gran precisión. La semejanza de triángulos permite mantener la proporción entre el descenso y el acercamiento a la pista de aterrizaje por medio del ángulo de acercamiento. En la figura 3.19 se muestra un esquema de la parte final del aterrizaje de un avión.

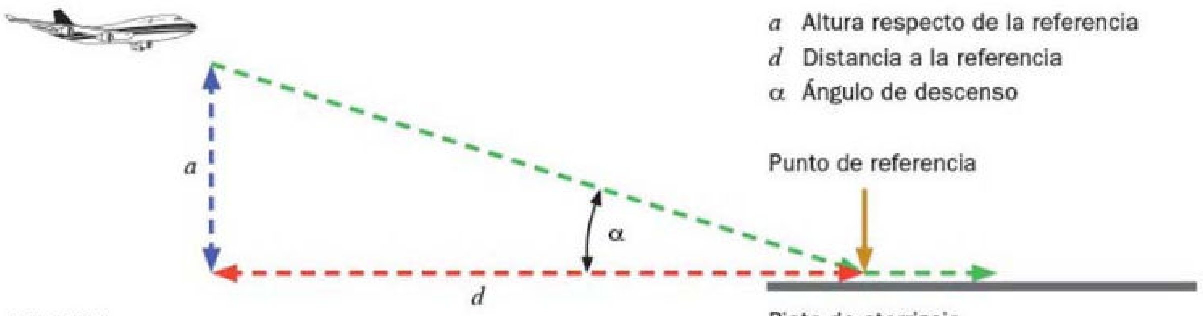


Figura 3.19

a) Si la altura a la que vuela un avión es de 10 km y su distancia al aeropuerto es de 35 km, y si se mantiene el ángulo de descenso constante, ¿a qué altura estará cuando su distancia al aeropuerto sea de 10 km? Escriban su procedimiento.

b) Si al iniciar su descenso un avión está a 8 km de altura y su distancia a la pista de aterrizaje es de 15 km, ¿a qué altura está el avión cuando se encuentra a 5 km de la pista de aterrizaje? Escriban su procedimiento.

Cierre

Recuerda que los criterios de congruencia de triángulos son:

- Tener tres lados iguales (LLL).
- Tener dos lados iguales y el ángulo formado por ellos también es igual (LAL).
- Tener un lado igual y los ángulos que comparten este lado también son iguales (ALA).

Los criterios de semejanza de triángulos son:

- Tener tres ángulos iguales.
- Tener tres lados proporcionales.
- Tener dos ángulos iguales y los lados que comparten esos ángulos son proporcionales.
- Tener dos lados proporcionales y el ángulo que forman esos lados es igual.

Taller de matemáticas

Considera la siguiente situación.

Se tiene un terreno formado por un rectángulo y un triángulo rectángulo, y está dividido en tres partes. En la figura 3.20 se muestran el terreno y las representaciones de sus medidas.

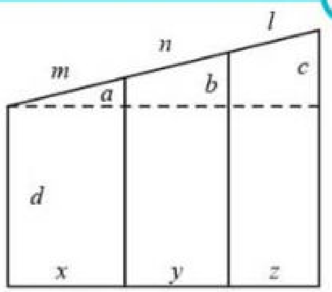


Figura 3.20

1. En la figura anterior hay tres triángulos semejantes, dibújalos por separado en los siguientes espacios:

2. Contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno o elige la respuesta correcta.
   a) ¿Cuáles son los criterios para argumentar la semejanza entre estos triángulos?
   b) Escribe las proporciones para todos los pares de triángulos semejantes.
   c) Escribe las expresiones algebraicas para las áreas de los tres triángulos semejantes.
   d) Escribe la expresión algebraica que representa el área del rectángulo.
   e) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa el área total del terreno?

   $\frac{d(d+c)}{2}$

   $\frac{d(x+y+z)+c(x+y+z)}{2}$

   $d(x+y+z)+\frac{c(x+y+z)}{2}$

   $\frac{(2d+c)(x+y+z)}{2}$

   f) Escribe la expresión algebraica que representa el área del triángulo con lados x, a y m.
   g) Escribe la expresión algebraica que representa el área del triángulo con lados $x+y$, b, $m+n$.
   h) Escribe la expresión algebraica que representa el área del triángulo con lados $x+y+z$, c, $m+n+l$.
   i) Escribe la expresión algebraica que representa el área del cuadrilátero con lados y, b, n, a, en términos de uno de los pares de triángulos semejantes que se tienen.
   j) Escribe la expresión algebraica que representa el área del cuadrilátero con lados z, c, l, b, en términos de uno de los pares de triángulos semejantes que se tienen.

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Introducción

¿Cómo podrías obtener las medidas de un objeto (edificio, árbol, etc.) sin tener que medirlo directamente?, o ¿cómo podrías dividir un segmento de recta en partes iguales? Si lo has hecho, ¿recuerdas cómo lo hiciste?, y si no lo has hecho, ¿cómo lo harías?

En esta lección aprenderás a usar la técnica que empleó un antiguo matemático y filósofo griego llamado Tales de Mileto para calcular distancias sin tener que medirlas directamente y para dividir un segmento de recta en partes iguales. Utilizaremos el *teorema de Tales* para resolver algunos problemas.

Analicen los dibujos de la figura 3.21 y, organizados en equipos de tres integrantes, analicen y respondan las preguntas.

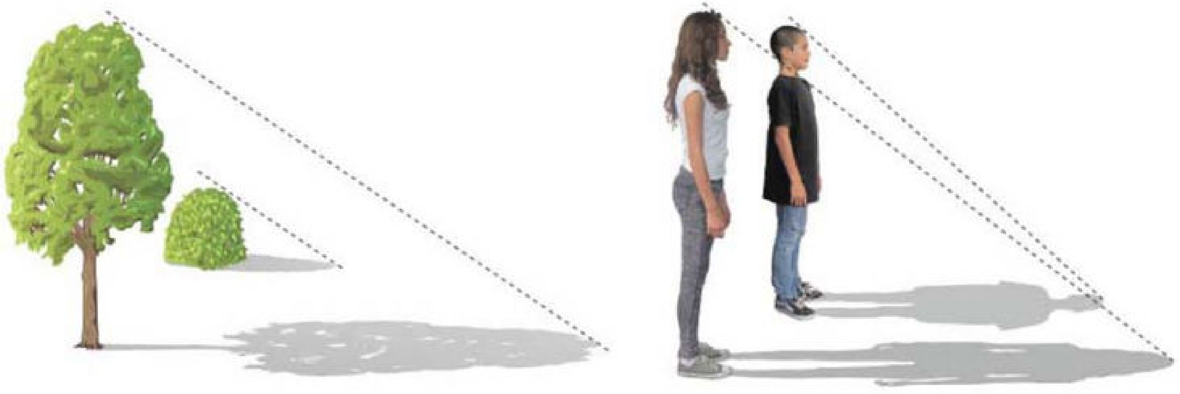


Figura 3.21

a) Expliquen por qué una de las sombras en el dibujo está mal colocada.

b) ¿En qué dibujo los triángulos que se forman son semejantes?

c) ¿Qué criterio de semejanza usarían para justificar su respuesta a la pregunta anterior?

d) ¿Los lados de los triángulos formados son proporcionales? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y con ayuda de su docente expliquen la siguiente afirmación: las alturas de los objetos y la longitud de las sombras que proyectan son conjuntos de cantidades directamente proporcionales.

Aplícalo

Lleva a cabo las siguientes actividades y responde las preguntas en tu cuaderno.

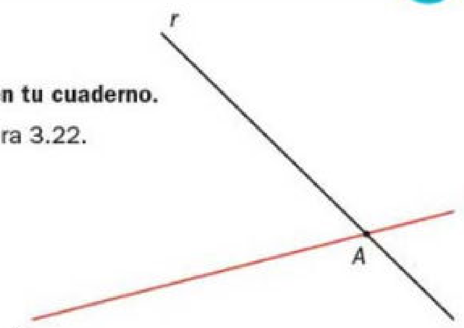


Figura 3.22

1. En una hoja de papel dibuja dos rectas, como se indica en la figura 3.22.
2. Marca sobre la recta *r* cuatro puntos de la siguiente manera:
   - El punto R_1 que se encuentre a 3 cm del punto *A*.
   - El punto R_2 que se encuentre a 6 cm del punto *A*.
   - El punto R_3 que se encuentre a 10 cm del punto *A*.
   - El punto R_4 que se encuentre a 15 cm del punto *A*.

   a) Sobre la recta s marca dos puntos, *B* a 3 cm del punto *A*, y *C* a 5 cm del punto A. Une con un segmento de recta los puntos R_2 con *B* y R_3 con *C*.

   b) ¿Los segmentos R_2B y R_3C son paralelos? Justifica tu respuesta.

   c) Traza un punto *D* sobre la recta s a distancia de 1.5 cm del punto *A*; verifica que el segmento de recta que se forma, R_1D, es paralelo a los segmentos R_2B y R_3C.

   d) ¿A qué distancia de *A* se debe colocar un punto *E* sobre la recta s para que el segmento R_4E sea paralelo a los segmentos R_1D, R_2B y R_3C? Explica tu respuesta.

   e) Explica por qué todos los segmentos formados son paralelos entre sí.

   f) Si se coloca un punto a distancia de 1 cm del punto *A* sobre la recta *r*, ¿a qué distancia de *A* se debe colocar un punto sobre la recta s para que el segmento que se forme al unirlos sea paralelo a los demás? Escribe el procedimiento que seguiste y compáralo con los de tus compañeros.

Construye tu conocimiento

Lleva a cabo las siguientes actividades y responde las preguntas en tu cuaderno.

1. Las rectas l_1 y l_2 son cortadas por un conjunto de rectas paralelas entre sí (figura 3.23).

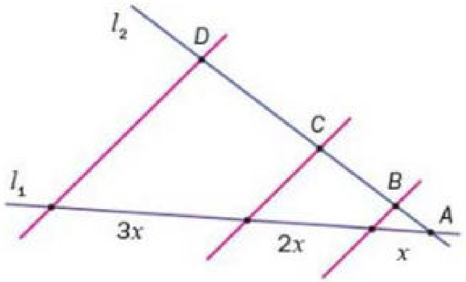


Figura 3.23

   a) Si la medida del segmento *AB* es de 2 cm, ¿cuánto miden los segmentos *CB* y *DC*?

   b) Si la medida del segmento *AB* es de 0.5 cm, ¿cuánto miden los segmentos *CB* y *DC*?

   c) Indica la medida de los segmentos *CB* y *DC* en función de la medida del segmento *AB*.

   d) Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y por qué.
   - La medida del segmento *AB* es igual a x, la medida del segmento *CB* es $2x$, y la medida del segmento *DC* es $3x$.
   - Como los segmentos x, $2x$ y $3x$ son proporcionales entre sí, entonces los segmentos *AB*, *CB* y *DC* son proporcionales entre sí.

Dos rectas son paralelas si siempre que tomamos dos puntos sobre una de ellas y trazamos perpendiculares a ésta que pasen por los puntos, entonces las distancias que se forman entre las rectas son iguales.

Aplícalo

Lleva a cabo las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. En la figura 3.24 los segmentos *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'*, *EE'*, *FF'* y *GG'* son paralelos. Sin tomar medidas, determina lo que se indica.

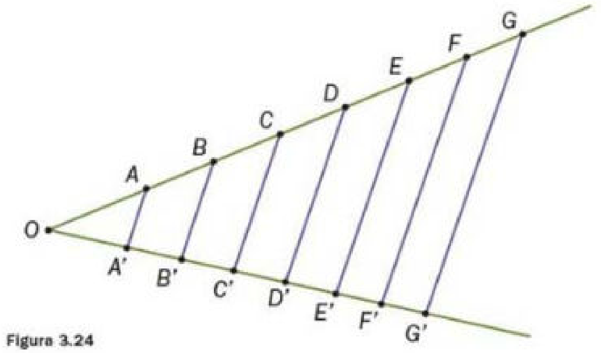


Figura 3.24

a) Los segmentos *AB*, *BC*, *CD* y *DE* miden lo mismo. Señala dos segmentos cuya medida sea la misma que la del segmento *A'B'*:

b) Los segmentos *D'E'* y *E'F'* miden lo mismo, indica tres segmentos cuya medida sea la misma que la del segmento *D'E'*:

c) Traza otra recta a partir del punto *O* que corte al haz de rectas paralelas y justifica que las longitudes de los segmentos que se forman son iguales:

d) Ahora sí, usa una regla para tomar medidas y verifica tus resultados.

2. Analiza la figura 3.25 para determinar lo que se pide.

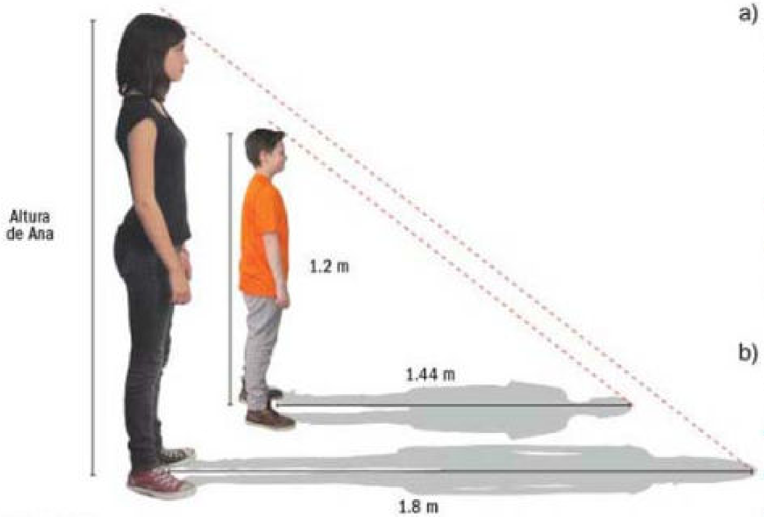


Figura 3.25

a) Los triángulos de la figura son semejantes, indica los lados correspondientes a los que se piden: medida del lado correspondiente al lado que mide 1.8 m y medida del lado correspondiente al lado que mide la altura de Ana.

b) Usa la *regla de tres simple* para calcular la altura de Ana.

Cierre

Un haz de rectas paralelas es un conjunto de rectas todas paralelas entre sí a cualquiera de ellas. El teorema de Tales establece que si dos rectas son cortadas por un haz de rectas paralelas entre sí, entonces las medidas de los segmentos de recta que se forman sobre una de ellas están en proporción directa con las medidas correspondientes sobre la otra recta.

Taller de matemáticas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. El segmento *OS* mide 5 cm (figura 3.26) y cada división en el segmento *OS* es de 1 cm. Dividan el segmento de recta *OR* en cinco partes iguales.

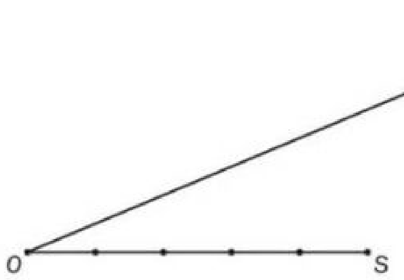
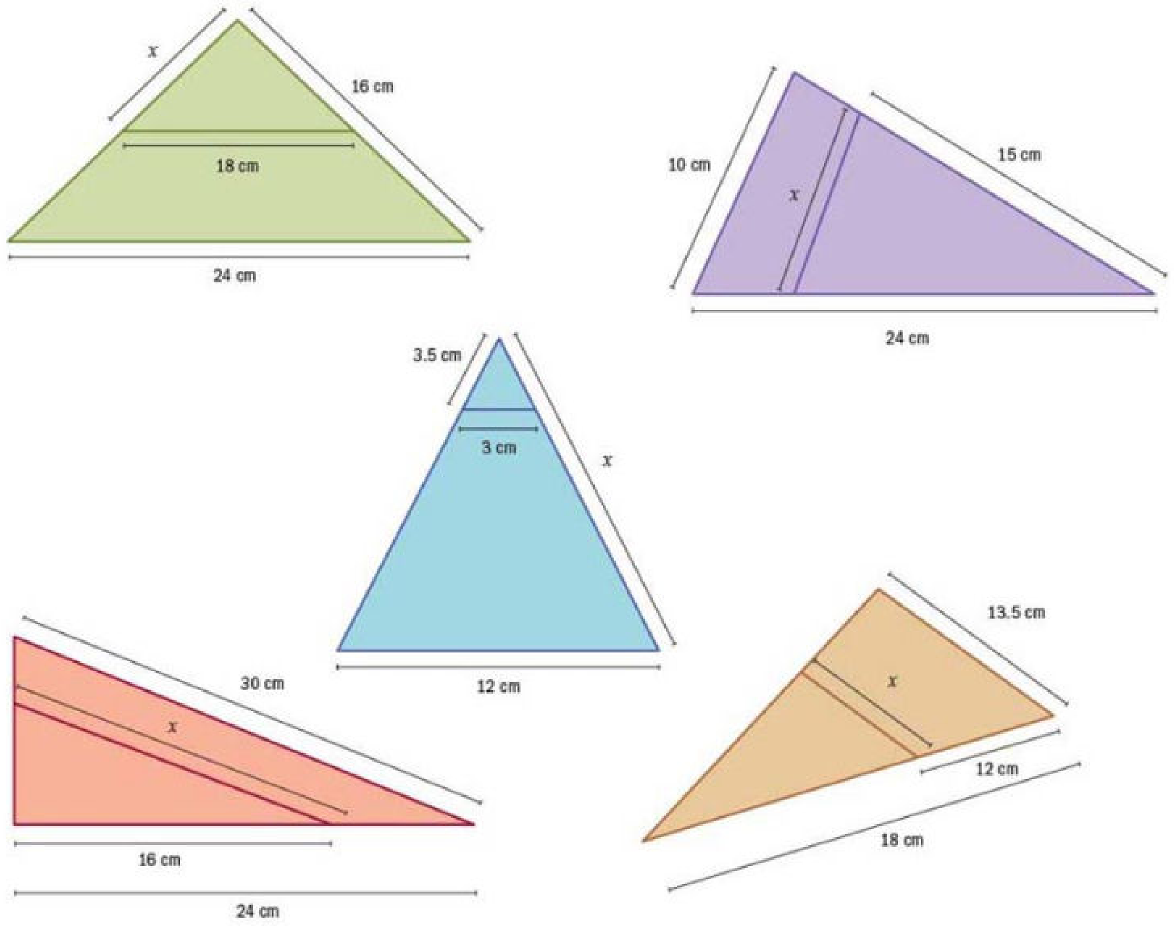


Figura 3.26

2. Aplicando el teorema de Tales, calculen el valor de x en cada uno de los triángulos y anótenlo en su cuaderno.



Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Introducción

Ya en otros grados aprendiste a hacer dibujos a escala, ¿te acuerdas cómo? El factor de escala indica de qué tamaño será el nuevo dibujo; por ejemplo, si el factor de escala es 2, significa que las medidas del dibujo a escala deben tener el doble del tamaño original, pero si el factor a escala es 0.75, o 3.4 o 0.15, ¿qué tan fácil es realizar el dibujo a escala?

Uno de los conceptos relacionados con los dibujos de figuras a escala es la homotecia, ¿has escuchado antes este término?, ¿sabes cómo se usa y para qué sirve?

En esta lección estudiarás la homotecia en figuras y la usarás para construir figuras semejantes y para la resolución de problemas.

Las siguientes figuras son semejantes entre sí. Determina cuáles de ellas se encuentran a escala de 0.25 una respecto de la otra y responde las preguntas.

Figura 3.27

a) Explica cómo elegiste el dibujo correcto, que está a escala 2.5.

b) De los dibujos que elegiste, ¿cuál es la medida de la altura del dibujo grande y la del dibujo más pequeño? Explica la relación entre ambas medidas.

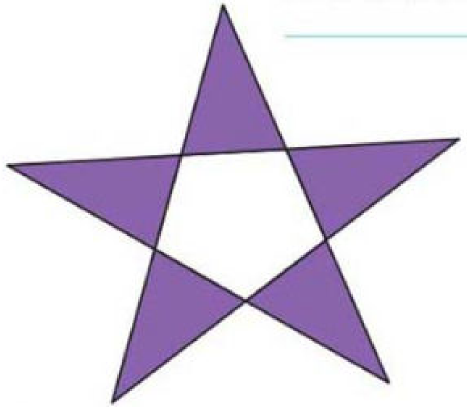


Figura 3.28

En tu cuaderno traza una figura a escala respecto de la figura 3.28, en la que el lado de cada triángulo sea $\frac{1}{3}$ de la medida del original. Hay una forma de hacerlo sin medir ángulos.

a) Explica cómo hiciste la reproducción a escala.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y con ayuda de su docente escriban de qué manera pueden saber si un objeto o figura está a escala respecto de otro.

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades y determinen lo que se pide.

1. Usando su regla unan el punto *B* con el punto *O* en la figura 3.29, y luego coloquen un punto *B'* a la mitad del segmento *BO*, como se hizo en el dibujo para los puntos *A* y *O*. Hagan lo mismo para los puntos *C* y *O*, y para *D* y *O*, llamen *C'* y *D'* a los puntos medios de los segmentos *CO* y *DO* respectivamente.

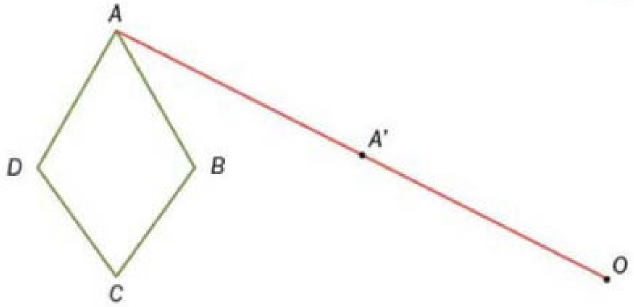


Figura 3.29

a) Ahora unan los puntos *A'* con *B'*, *B'* con *C'*, *C'* con *D'* y *D'* con *A'*, para formar el cuadrilátero *A'B'C'D'*.

b) El segmento *AB* debe ser paralelo al segmento *A'B'*. Verifíquenlo.

c) ¿A qué segmentos en el cuadrilátero *A'B'C'D'* son paralelos los siguientes segmentos?

BC: ________ *CD*: ________ *DA*: ________

d) Midan los segmentos que se indican en la tabla y complétenla.

Lados del cuadrilátero *ABCD*	Medida de los lados del cuadrilátero *ABCD*
AB	
BC	
CD	
DA	

Lados del cuadrilátero *A'B'C'D'*	Medida de los lados del cuadrilátero *A'B'C'D'*
A'B'	
B'C'	
C'D'	
D'A'	

e) También midan los ángulos que se indican en la tabla y complétenla.

Ángulos del cuadrilátero *ABCD*	Medida de los ángulos del cuadrilátero *ABCD*
∡*DAB*	
∡*ABC*	
∡*BCD*	
∡*CDA*	

Ángulos del cuadrilátero *A'B'C'D'*	Medida de los ángulos del cuadrilátero *A'B'C'D'*
∡*D'A'B'*	
∡*A'B'C'*	
∡*B'C'D'*	
∡*C'D'A'*	

f) Escriban una explicación de por qué los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'* son semejantes.

g) ¿Cuál es la razón de semejanza del cuadrilátero ABCD respecto del cuadrilátero *A'B'C'D'*?

2. Copien la figura 3.29 en su cuaderno y realicen lo siguiente:
   - Coloquen un punto *A''* a tres cuartas partes del segmento *AO*.
   - Coloquen un punto *B''* a tres cuartas partes del segmento *BO*.
   - Coloquen un punto *C''* a tres cuartas partes del segmento *CO*.
   - Coloquen un punto *D''* a tres cuartas partes del segmento *DO*.

   a) Unan los puntos *A''* con *B''*, *B''* con *C''*, *C''* con *D''* y *C''* con *A''*.

   b) ¿Cuál es la razón de semejanza del cuadrilátero *A'B'C'D'* respecto del cuadrilátero *A''B''C''D''*?

   c) ¿Cuál es la razón de semejanza del cuadrilátero *ABCD* respecto del cuadrilátero *A''B''C''D''*?

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y establezcan una relación entre las razones de semejanza encontradas en las actividades 1 y 2.

3. Copien la figura 3.30 en su cuaderno y después dibujen sobre ella los siguientes trazos.
   - Coloquen un punto *A'* a 1.5 veces la distancia del segmento *OA*.
   - Coloquen un punto *B'* a 1.5 veces la distancia del segmento *OB*.
   - Coloquen un punto *C'* a 1.5 veces la distancia del segmento *OC*.
   - Coloquen un punto *D'* a 1.5 veces la distancia del segmento *OD*.
   - Coloquen un punto *E'* a 1.5 veces la distancia del segmento *OE*.

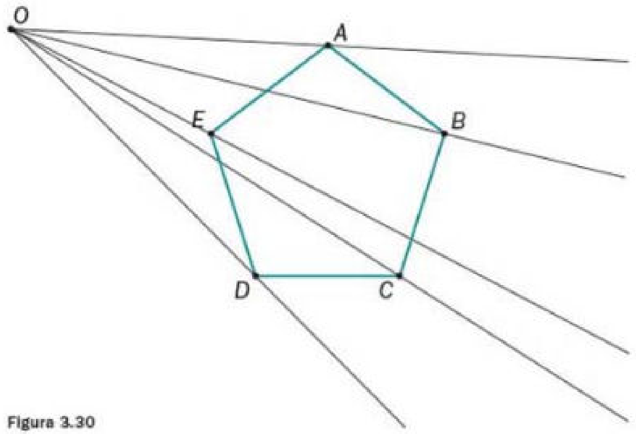


Figura 3.30

   a) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono *ABCDE* respecto del pentágono *A'B'C'D'E'*?

   b) Tracen un pentágono *A''B''C''D''E''* como los anteriores, de modo que la razón de semejanza entre éste y el pentágono *ABCDE* sea de 12.

   c) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono *A''B''C''D''E''* respecto del pentágono *ABCDE*?

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y establezcan una relación entre las razones de semejanza.

Una transformación geométrica que permite construir figuras semejantes a otra es la homotecia. Por ejemplo, los triángulos de la figura 3.31 son homotéticos, con centro de homotecia en el punto *O*.

Se llama razón de homotecia a la razón de semejanza de una figura respecto de otra. Por ejemplo, la razón de homotecia del triángulo *ABC* respecto del triángulo *A'B'C'* es de $\frac{1}{2}$, mientras que la razón de homotecia del triángulo *A'B'C'* respecto del triángulo *ABC* es de 2.

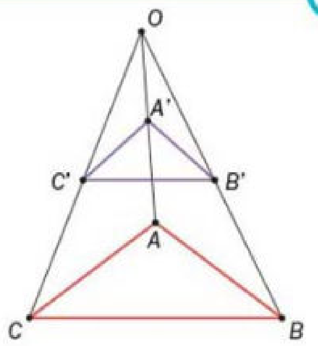


Figura 3.31

Aplícalo

Lleven a cabo las siguientes actividades en parejas. Copien en su cuaderno la figura 3.32.

1. Construyan tres figuras homotéticas a la figura 3.32 con centro de homotecia en el punto *O*, de tal manera que:
   - La figura 2 tenga una razón de homotecia de $\frac{1}{2}$ respecto de la original.
   - La figura 3 tenga una razón de homotecia de $\frac{2}{3}$ respecto de la original.
   - La figura 4 tenga una razón de homotecia de $\frac{2}{6}$ respecto de la original.

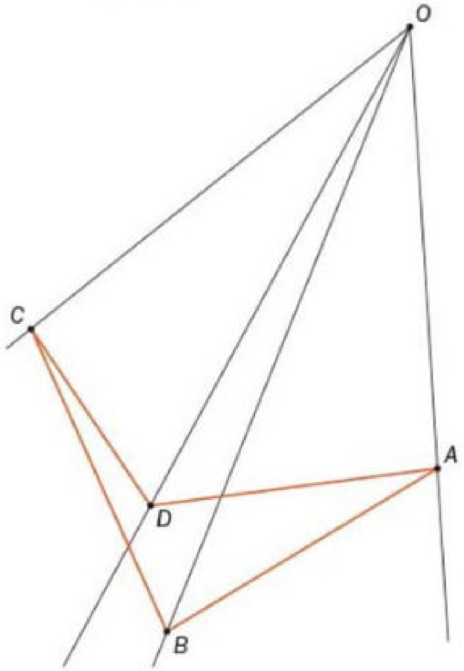


Figura 3.32

2. Respondan en su cuaderno lo siguiente.

   a) ¿Cuál es la razón de homotecia que hay entre la figura 2 y la figura 3?

   b) ¿Cuál es la razón de homotecia que hay entre la figura 3 y la figura 4?

   c) ¿Cuál es la razón de homotecia que hay entre la figura 2 y la figura 4?

3. Comparen sus procedimientos con otras parejas de trabajo y comenten cómo se puede obtener la razón de homotecia del inciso c) a partir de las razones de homotecia de las figuras 2 y 3.

   Copien en su cuaderno la figura 3.33 y midánla para calcular las razones de homotecia que se indican a continuación.

   a) Razón de homotecia del triángulo *ABC* y el triángulo *A'B'C'*:

   b) Razón de homotecia del triángulo *A'B'C'* y el triángulo *A''B''C''*:

   c) Razón de homotecia del triángulo *ABC* y el triángulo *A''B''C''*:

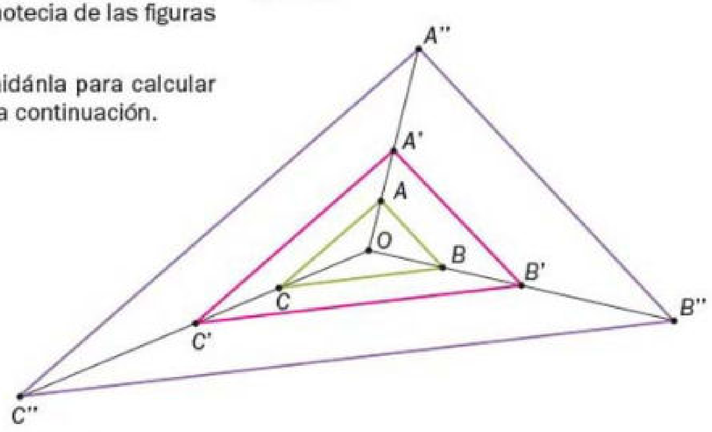


Figura 3.33

TIC a tu alcance

Visita la siguiente página electrónica, en la que podrás practicar con los centros y las razones de homotecia en un triángulo:
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html

4. En la figura de su cuaderno, tracen sobre el mismo dibujo un triángulo cuya razón de homotecia sea de $\frac{1}{2}$ respecto del punto *O* y el triángulo *A'B'C'*.

5. En la figura de su cuaderno, tracen sobre el mismo dibujo un triángulo cuya razón de homotecia entre él y el triángulo *ABC* sea de 4.
   a) ¿Cuánto debe medir el lado correspondiente al lado *C''B''* de un triángulo que se encuentra a razón de homotecia de 2.5 respecto del punto *O* y del triángulo *A''B''C''*?
   b) Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten en grupo si el centro o punto de homotecia se puede encontrar en el interior o en el exterior de la figura.

6. Sin medir, indiquen en cuál de las siguientes figuras hay homotecia y expliquen en su cuaderno cómo llegaron a esa conclusión.

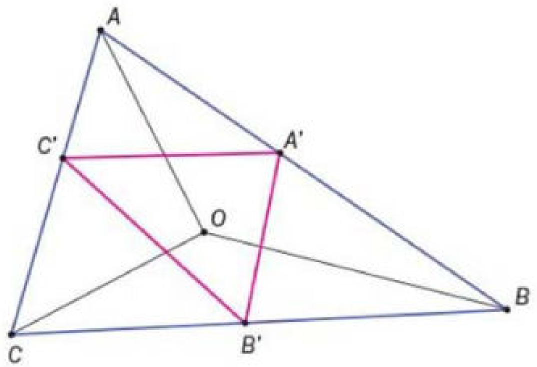


Figura 3.34

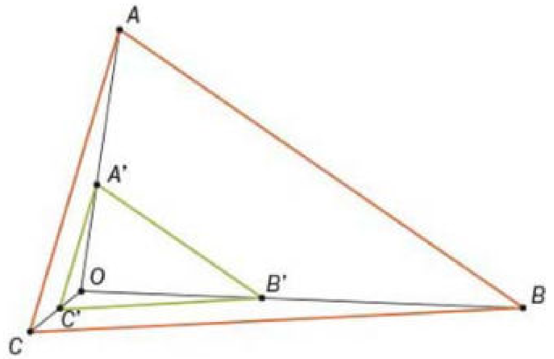


Figura 3.35

Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con ayuda de su docente establezcan una manera de determinar si dos pares de figuras cualesquiera son homotéticas.

Cierre

Las transformaciones geométricas que permiten construir figuras semejantes a otras se denominan homotecias.

La rotación, la reflexión y la traslación son homotecias, por lo tanto, una figura homotética puede tener uno o más ejes de simetría, dependiendo del tipo de transformación aplicado.

Se llama razón de homotecia a la razón de semejanza de una figura respecto de otra. El punto o centro de homotecia se puede encontrar en el interior o en el exterior de una figura.

Taller de matemáticas

En parejas, resuelvan las siguientes situaciones.

1. Determina si las siguientes figuras son homotéticas, y de ser así, calcula la razón de homotecia (figura 3.36).

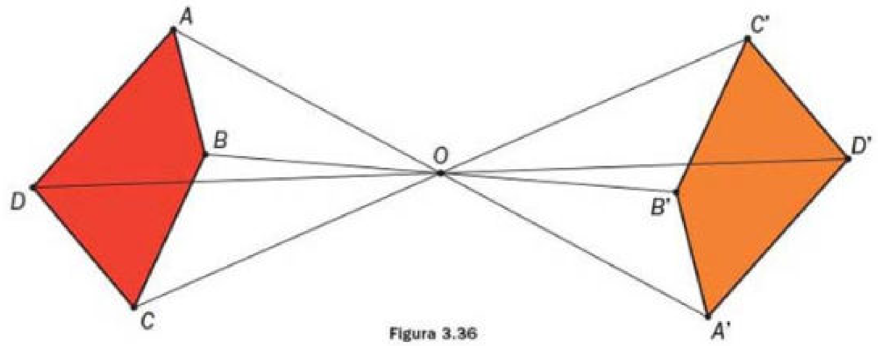


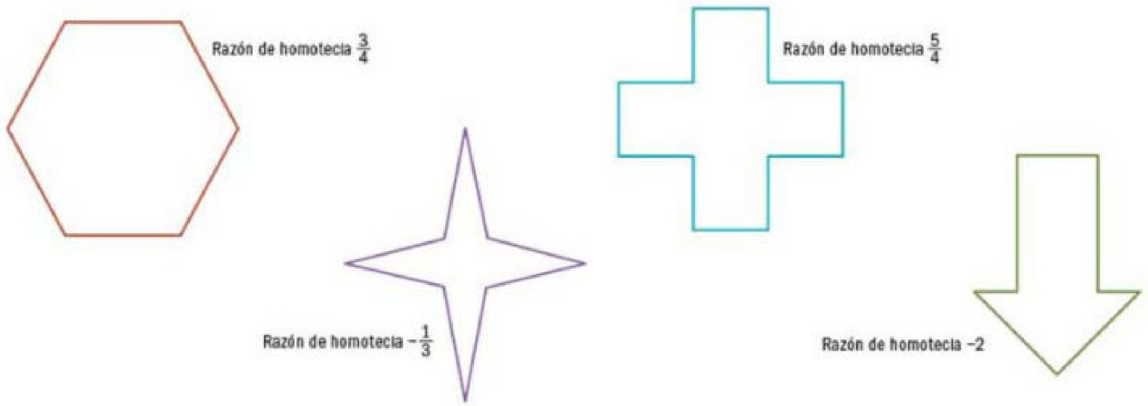
Figura 3.36

   a) ¿Son homotéticas? Argumenta tu respuesta.

   b) Razón de homotecia: __________

Realicen lo que se indica.

1. Con ayuda del profesor, comenten en grupo lo siguiente: cuando las figuras se encuentran al lado contrario del centro de homotecia se dice que la homotecia es inversa, y en este caso se considera la razón de semejanza negativa.
2. En el dibujo anterior tracen un cuadrilátero homotético al *ABCD*, con centro de homotecia en el punto O y cuya razón de homotecia sea de $-\frac{1}{2}$.
3. En tu cuaderno copia los siguientes dibujos y traza las figuras homotéticas que se indican en cada caso.



Gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Figura 3.37 Antena parabólica.

Introducción

En el primer bloque aprendiste que la representación gráfica de algunas funciones eran parábolas.

¿Alguna vez has escuchado de las antenas parabólicas (figura 3.37) y sus múltiples usos en las telecomunicaciones?

Se emplea la forma de las parábolas y sus características esenciales para hacer antenas de comunicación, porque tienen la siguiente propiedad: los rayos que llegan paralelos a su eje se concentran en el foco de la parábola (figura 3.38), punto en el que se coloca un receptor para amplificar la señal que se recibe desde la emisora.

Todas las parábolas son representaciones gráficas de una función cuadrática.

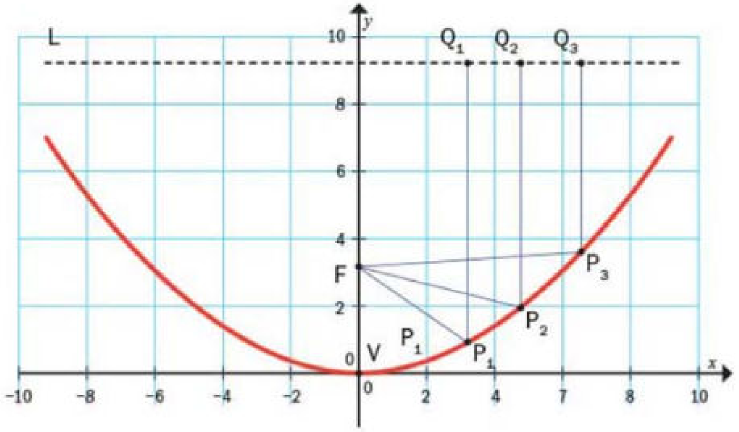


Figura 3.38 Propiedades geométricas de una parábola.

Construye tu conocimiento

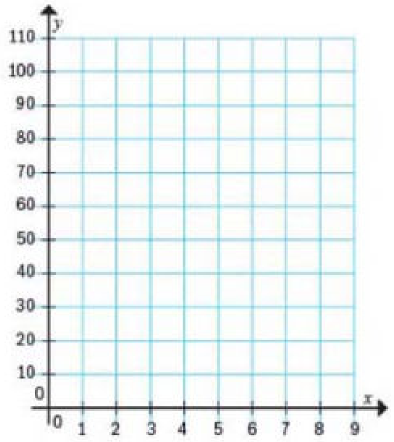
Lleva a cabo las siguientes actividades, en las que construirás gráficas que representan funciones cuadráticas.

1. Consideremos una pelota que es lanzada con una velocidad constante de 45 $\frac{m}{s}$, y la ecuación $d = vt - 5t^2$.

   a) Completa la siguiente tabla para determinar la distancia recorrida por la pelota en función del tiempo.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distancia (m)	0	40	70							

   b) Con los datos de la tabla completa la representación gráfica de la función que has identificado y después responde las preguntas.



   c) ¿Qué representa la gráfica, el trayecto de la pelota o su comportamiento en relación con la velocidad y el tiempo de recorrido? Explica tu respuesta.

   d) ¿En qué segundo la pelota alcanza el punto más alto de su recorrido?

   e) ¿En qué coordenadas termina su recorrido la pelota?

   f) Explica si adviertes alguna regularidad entre los puntos que te permiten trazar la gráfica.

   g) ¿Cuáles son las coordenadas en que se localiza el vértice de la parábola?

2. Se puso a prueba un automóvil para comprobar el rendimiento del combustible y se notó que para velocidades mayores que 10 $\frac{km}{h}$ y menores que 150 $\frac{km}{h}$, el rendimiento de combustible $r\left(\frac{km}{litro}\right)$ está relacionado con la velocidad $v\left(\frac{km}{h}\right)$ del automóvil, mediante la función:

$$r(v) = 0.005v \cdot (170 - v)$$

   a) ¿A qué velocidad tiene el auto su máximo rendimiento? ______

   b) ¿En qué te fijaste para contestar lo anterior?

   c) Elabora una tabla a partir de la gráfica (figura 3.39) para determinar el rendimiento del combustible a diferentes velocidades:

Litros					
$\frac{km}{h}$					

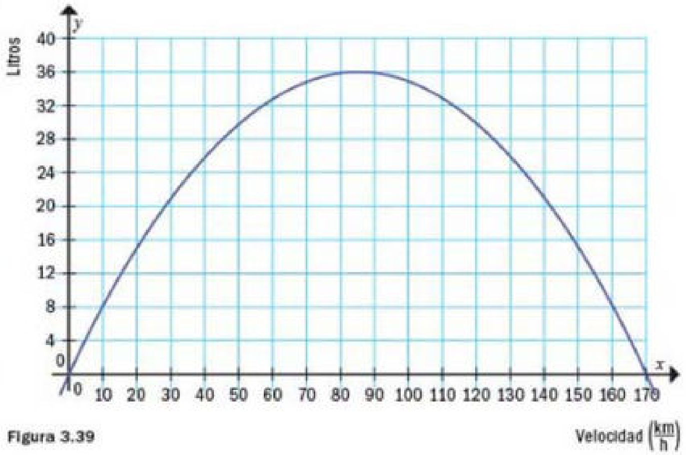
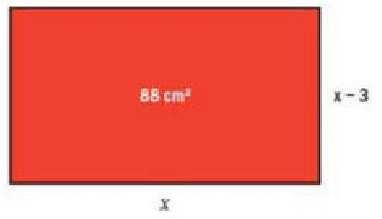


Figura 3.39

Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros y verifíquenlos con su docente.



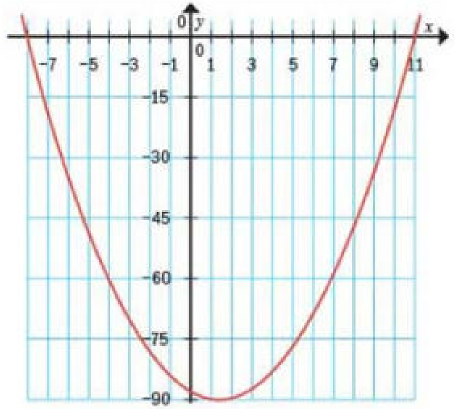


Figura 3.40

Aplícalo

Para verificar que han aprendido a representar gráficamente las funciones cuadráticas, en parejas lleven a cabo las siguientes actividades.

1. El área del rectángulo rojo está determinada por la función:

$$f(x) = x^2 - 3x - 88$$

Consideren la gráfica de la figura 3.40 para obtener las dimensiones del rectángulo.

a) Tomando como referencia la coordenada y del punto más bajo de la parábola (−88) y su simetría (figura 3.40), ¿cuál es la medida del lado más largo del rectángulo? Expliquen cómo lo determinaron.

b) ¿Cuál es la medida del lado más corto de la figura? Expliquen cómo lo determinaron.

2. Se tiene un rollo de listón de 100 m, ¿cuál será la máxima superficie que puede rodear el listón si se coloca de forma rectangular? Escriban su procedimiento en el cuaderno para obtener la respuesta. Recuerden que el perímetro y el área de un rectángulo son: $P = 2(b + h)$ y $A = b \cdot h$

a) Elaboren una tabla en su cuaderno para conocer la respuesta a esta pregunta, utilicen la gráfica de la figura 3.41, que describe el comportamiento de la función, y marquen en ella los puntos que cumplen con los valores de x_1 y x_2 en la representación.

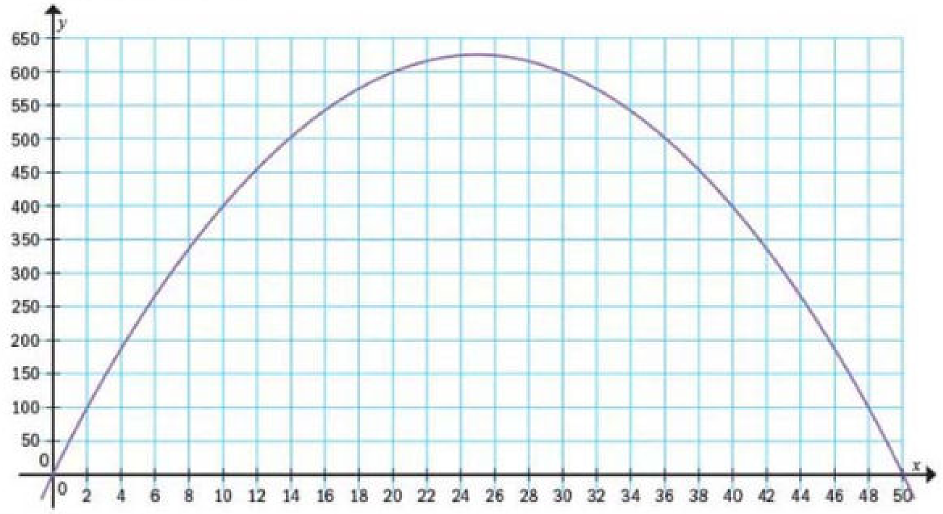


Figura 3.41

b) Si un compañero les dice que no es necesario hacer una tabla para encontrar los valores que hacen falta, que sólo tienen que examinar la gráfica para encontrar el valor de la superficie rodeada por el listón y afirma que son 625 m², ¿estarían de acuerdo con su planteamiento? Argumenten su respuesta.

TIC a tu alcance

*Si tienen oportunidad asistan al aula de medios de su escuela y utilicen el programa **GEOGEBRA** para obtener gráficas de funciones cuadráticas. Pidan ayuda a su docente para que aprendan a utilizar el programa.*

c) ¿Cuál es el valor del vértice de la parábola, considerando la ecuación y la gráfica?

d) ¿Cuál es la función cuadrática que se puede determinar a partir de la fórmula para calcular el perímetro del rectángulo, cuya representación gráfica es la parábola de la figura 3.42? Escriban sus procedimientos para determinarla.

e) En el caso de esta representación gráfica, ¿cuáles son las raíces de la ecuación que representa la gráfica? Expliquen cómo las obtuvieron.

f) ¿En qué punto del plano cartesiano se pueden identificar las raíces de la ecuación representada?

La representación gráfica de ecuaciones cuadráticas son parábolas. En la forma general de una función cuadrática podemos identificar tres términos:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$$

Aunque la función cuadrática más sencilla es $y = x^2$, es decir, cuando $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.41. Advierte que el mínimo valor que toma la coordenada y es 0, cuando $x = 0$, y que y no puede tomar valores negativos, puesto que es de la forma $y = x^2$, y un número elevado al cuadrado siempre es positivo.

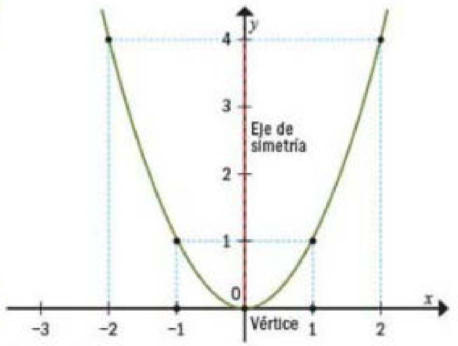


Figura 3.42

En una parábola distinguimos el vértice y el eje de simetría. El vértice es el punto donde la función alcanza su máximo o su mínimo valor. El eje de simetría es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola. Éste divide a la parábola en dos ramas simétricas.

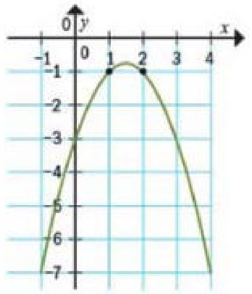
Para la función $y = x^2$ el vértice es el punto (0,0), es decir está en el origen, y es el mínimo valor que toma la función, y el eje de simetría es la recta vertical $x = 0$ o el eje y.

Construye tu conocimiento

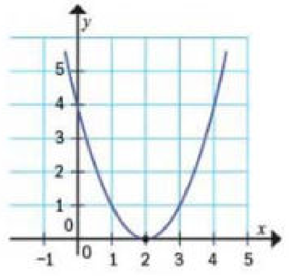
En parejas, analicen las siguientes funciones y su representación gráfica.

1. Expliquen cómo interpretan cada gráfica y elaboren algunas conclusiones que les permitan definir cómo se grafican las funciones cuadráticas.

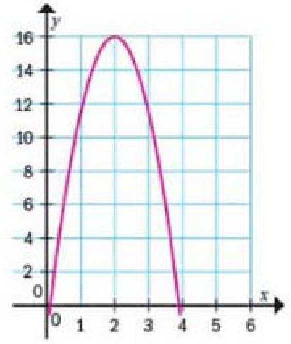
a) $fx = -x^2 + 3x - 3$



b) $fx = x^2 - 4x + 4$



c) $fx = -2x^2 + 12x - 2$



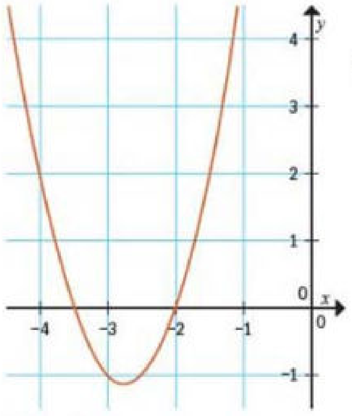


Figura 3.43

2. La gráfica de la figura 3.43 representa el área de un rectángulo, expresada en cm², en función de la medida de sus lados.
   a) ¿Cuál es el área que tiene dicha figura?
   b) ¿Cuál es la ecuación cuadrática que está representándose gráficamente?
   c) ¿Cuáles son las raíces x_1 y x_2 de la ecuación?

Cierre

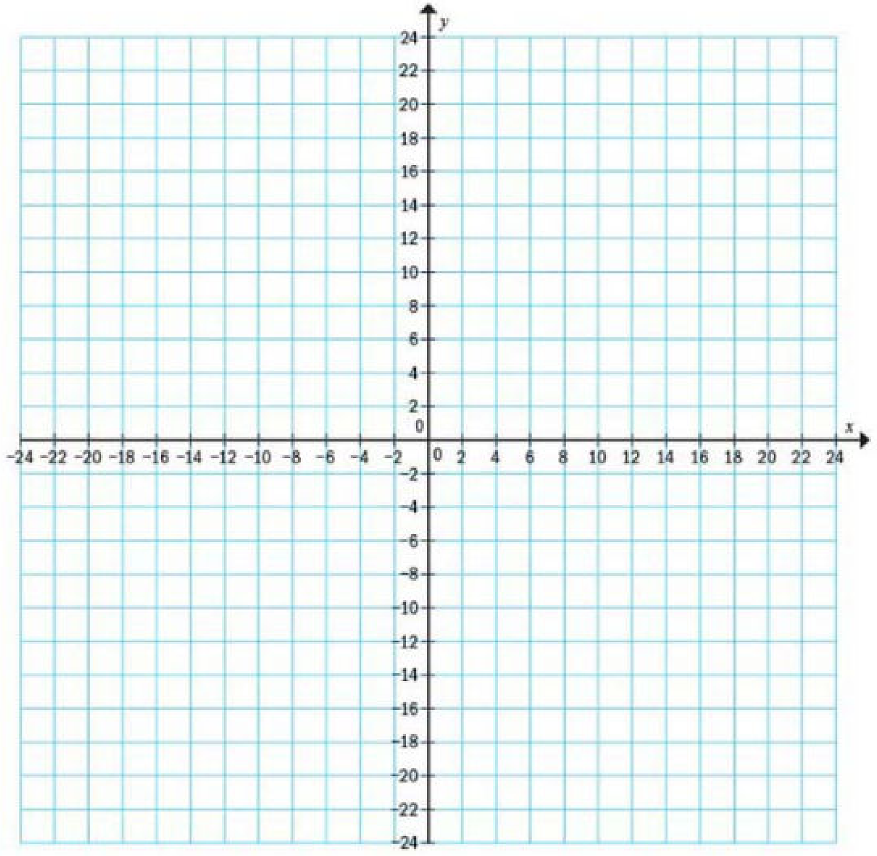
Existen algunos puntos básicos para construir una gráfica de ecuaciones cuadráticas:

Calcular	Marcar en el plano
Se aplica la fórmula resolvente y se obtienen las raíces x_1 y x_2.	Si las raíces son reales se marcan los puntos de contacto con el eje x en x_1 y x_2.
Coordenadas del vértice $V(V_x, V_y)$: $V_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ o $V_x = \frac{-b}{2a}$ $V_y = f(V_x)$, se reemplaza en la función x por V_x.	Vértice: $V(V_x, V_y)$ Eje de simetría: recta vertical que pasa por V_x (se marca con una línea punteada).
Ordenada al origen: $(0, c)$	Punto de contacto con el eje y. Se aprovecha el eje de simetría para obtener puntos simétricos.

Taller de matemáticas

Organizados en equipos, midan la altura de un edificio del lugar donde viven, si no hay edificios escojan un lugar alto que puedan medir y desde donde puedan dejar caer una pelota de goma. Pídanle a un adulto que los supervise.

1. Tomando como referencia la medida de la altura del edificio calculen el tiempo que la pelota tardará en llegar al suelo, consideren la función: $d(t) = vt + \frac{1}{2}gt^2$ y recuerden que la aceleración gravitatoria para la Tierra es $g = 9.8\frac{m}{s^2}$.
2. Tabulen al menos 10 valores en una tabla de distancia recorrida en función del tiempo transcurrido durante la caída de la pelota.
3. En el eje horizontal de su plano cartesiano se grafican los valores del tiempo que calcularon, y en el eje vertical los valores para la distancia.
4. Hagan los cálculos correspondientes para encontrar las raíces de la función y obtengan el vértice de la parábola resultante.
5. Dibujen la gráfica de la función, tracen el eje de simetría y encuentren los valores simétricos en la parábola.



Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones

Introducción

En lecciones anteriores hemos estudiado la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas; ahora vamos a analizar y a construir gráficas con secciones rectas y curvas para modelar diversas situaciones.

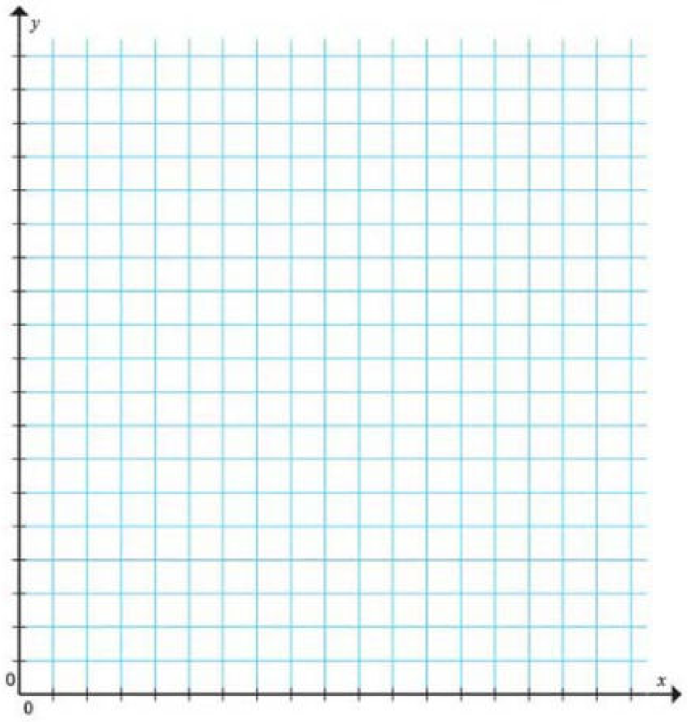
Lee el siguiente texto y en parejas lleven a cabo la actividad.

Ana describe de la siguiente forma el recorrido que hace para llegar a la escuela "20 de Noviembre":

"Primero salgo de mi casa caminando y comienzo a subir una pendiente, tardo en llegar hasta lo parejo como unos 7 minutos, y sigo caminando otros 5 minutos hasta llegar a un tramo de bajada con grandes rocas que tardo en pasar otros 4 minutos, luego vuelvo a subir por un camino que va de subida durante 5 minutos más y desde ahí diviso la escuela, sigo caminando unos minutos más y después comienzo a bajar por el camino que conduce directamente al frente de la escuela, en total tardo en llegar aproximadamente 35 minutos".

Usen el plano cartesiano para representar de manera gráfica el recorrido que hace Ana; consideren como punto de partida el origen del plano.

Comenten y respondan las siguientes preguntas.



- ¿Qué características tiene la línea que describe el recorrido?
- En este caso, ¿qué dato es más importante conocer para trazar la línea de recorrido, el tiempo que se tarda Ana caminando o las características del terreno? Expliquen su respuesta.
- ¿Qué tipo de movimiento representa el recorrido de Ana para llegar la escuela? ¿Cómo lo relacionan con lo que aprendieron en su curso de Ciencias II?

Construye tu conocimiento

Analiza las siguientes situaciones y responde en tu cuaderno las preguntas para cada caso. Al finalizar, compara tus procedimientos con los de tus compañeros y con ayuda de su docente verifiquen sus resultados.

1. La gráfica de la figura 3.44 representa el consumo de agua potable (en metros cúbicos) de una vivienda por un periodo de 12 meses, analízala y responde lo siguiente.
   a) ¿En qué mes se consumió la menor cantidad de agua?
   b) ¿En qué meses se consumió la misma cantidad de agua?
   c) ¿Cuál es el promedio de consumo de agua durante el año?
   d) Considerando que por los primeros 10 m^3 de consumo de agua potable se paga una cuota fija de \$73, y \$25 más por cada metro cúbico extra que se consuma, ¿cuánto debió pagarse en el mes de julio?
   e) Dibuja en tu cuaderno la gráfica que represente los pagos hechos por el consumo de agua durante el año, y compárala con la que representa el consumo en metros cúbicos. ¿Se parecen? Explica tu respuesta.

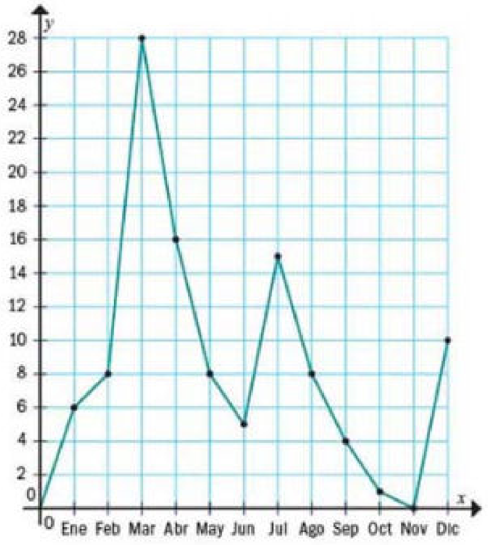


Figura 3.44

2. El elevador de un hotel de la ciudad de Zacatecas recorre 2 m cada 4 segundos. La gráfica de la figura 3.45 muestra su comportamiento durante un recorrido, analízala y después redacta en tu cuaderno tres enunciados que describan dicho recorrido.

Figura 3.45

   a) Si la velocidad del elevador es constante y no se detiene en ningún piso, ¿cómo debe ser la representación gráfica de su desplazamiento?
   b) ¿Cuál es la representación algebraica que describe el desplazamiento del elevador considerando su velocidad y el tiempo de su recorrido? ¿Es la misma para todo el recorrido? Explica tu respuesta.
   c) Traza sobre la gráfica anterior la representación del recorrido del elevador a velocidad constante, y compara ambas representaciones. Explica las similitudes y las diferencias.

Aplícalo

En parejas, analicen las siguientes situaciones y lleven a cabo las actividades en su cuaderno.

1. La alberca del centro recreativo de Valparaíso tiene la siguiente forma y dimensiones (figura 3.46):

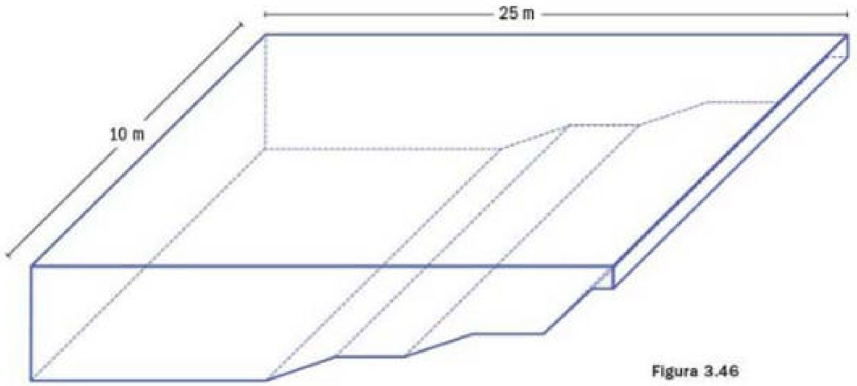


Figura 3.46

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas describe adecuadamente el llenado de la alberca con agua, suponiendo que su flujo es constante a razón de $5\,\frac{m^3}{min}$? Expliquen su respuesta.

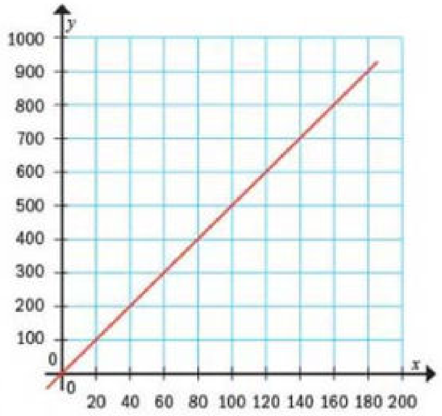


Figura 3.47

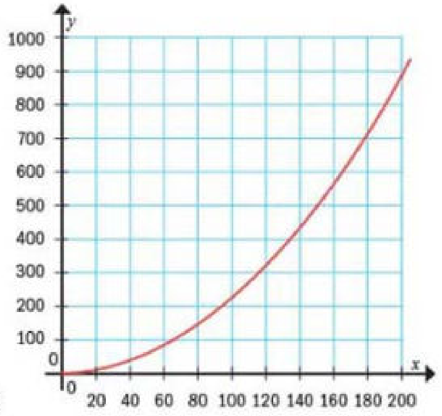


Figura 3.48

Comenten con sus compañeros, ¿cómo puede representarse gráficamente el volumen de la alberca en función de la altura de cada uno de sus niveles? Dibujen en su cuaderno un plano para demostrarlo y luego comparen con lo que hicieron el resto de sus compañeros, analicen las similitudes y diferencias en sus gráficas.

2. El taller de enderezado y pintura de autos "El Chester" utiliza un compresor de aire computarizado (herramienta con la que se pintan los autos) que dibuja una gráfica de funcionamiento a partir del momento en que se enciende. La herramienta funciona con un mínimo de 30 libras de presión (lb/psi) y está programada para encenderse automáticamente cuando se llega a ese valor y a apagarse cuando llega a las 120 lb/psi. La gráfica de la figura 3.49 representa el funcionamiento del compresor después de una hora de trabajo, tiempo que se tardan en pintar un auto.

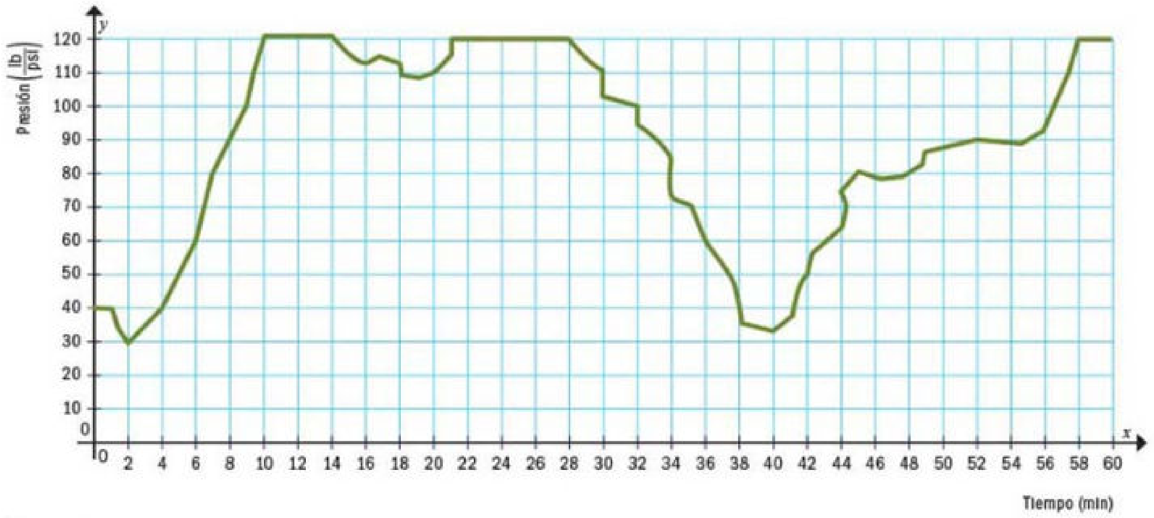


Figura 3.49

a) ¿En qué rango de tiempo durante una hora de trabajo estuvo apagado el compresor?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la presión máxima el compresor cuando no se está usando el aire para pintar?

c) ¿En qué rango de tiempo trabajó más el compresor?

d) ¿En qué deben basarse para saber si el compresor está encendido o apagado?

e) Escriban tres enunciados que les permitan interpretar el comportamiento del compresor de acuerdo con la gráfica.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, y con ayuda de su docente corríjanlas si es necesario.

Muchos fenómenos se pueden describir por medio de funciones cuya representación gráfica es una línea recta o una curva, pero hay algunos que requieren de la combinación de ambas. Para ciertos valores las variables presentan un comportamiento lineal (rectas) y para otros muestran un comportamiento no lineal (curvas).

Cuando analizamos algún fenómeno, como el movimiento de un objeto o la manera en que se llena un recipiente, necesitamos describirlo por intervalos para identificar si su comportamiento está descrito por una función constante, lineal o cuadrática. Para ello podemos utilizar la gráfica correspondiente y dividirla en intervalos para hacer el análisis, como en los ejemplos de la actividad anterior.

Las gráficas "por secciones" tienen múltiples aplicaciones en diversas disciplinas; por ejemplo, en economía pueden describir periodos de altas y bajas en los precios de un mismo producto; en ciencias como la Biología se sabe que el crecimiento de una planta o un animal es lineal en determinadas condiciones, pero presenta momentos en que se **estabiliza** o se comporta de forma no lineal; en física, podemos determinar el volumen de llenado con un líquido en un recipiente con una función lineal, pero la forma del recipiente condiciona las características de las secciones de la gráfica que representa su llenado, independientemente del flujo o gasto.

Glosario

Estabilizar. *Dar a algo permanencia, continuidad o equilibrio.*

Edad	Horas
6	2.5
10	3
12	3
16	3.5
18	4
24	4
30	2.5
40	2
46	1.5
50	1.3
54	1
60	0.7

Aplícalo

En parejas, analicen el siguiente problema y lleven a cabo las actividades en su cuaderno.

En la escuela secundaria "Benito Juárez" los alumnos de tercer grado aplican una encuesta a 120 personas para saber cuántas horas al día dedican a ver televisión, y clasifican los datos por grupo de edades de los participantes.

1. Con los datos de la tabla dibuja en tu cuaderno la gráfica que describe la encuesta. De acuerdo con la gráfica que dibujaste, responde lo siguiente.
   a) ¿Cuál es la edad de los encuestados que ven más televisión diariamente?
   b) ¿En qué rangos de edades se presenta una regularidad en el número de horas que ven televisión?
   c) ¿Cuáles son los grupos de edad que ven menos televisión al día?
   d) Describe la relación entre la edad y las horas que se ve televisión diariamente.
   e) ¿Qué otras interpretaciones puedes explicar a partir de la información que representa la gráfica?

Figura 3.50

2. Los recipientes de la figura 3.50 serán llenados con agua. Relaciónalos con su gráfica correspondiente (figura 3.51), la cual representa la altura de llenado en función del tiempo, y expliquen cómo decidieron su elección.

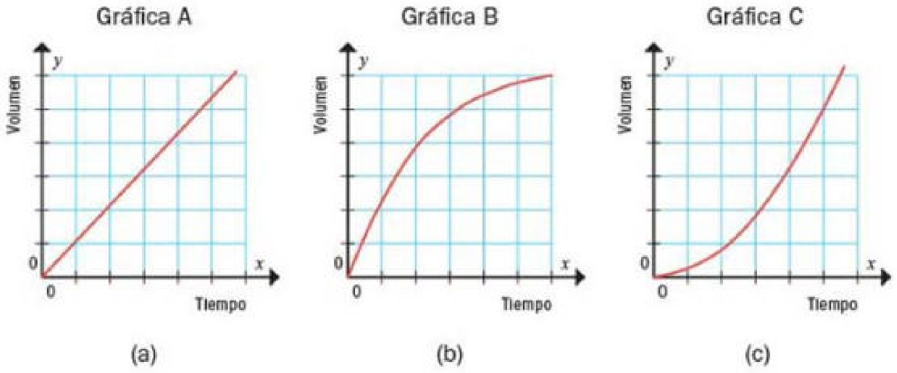


Figura 3.51

Cierre

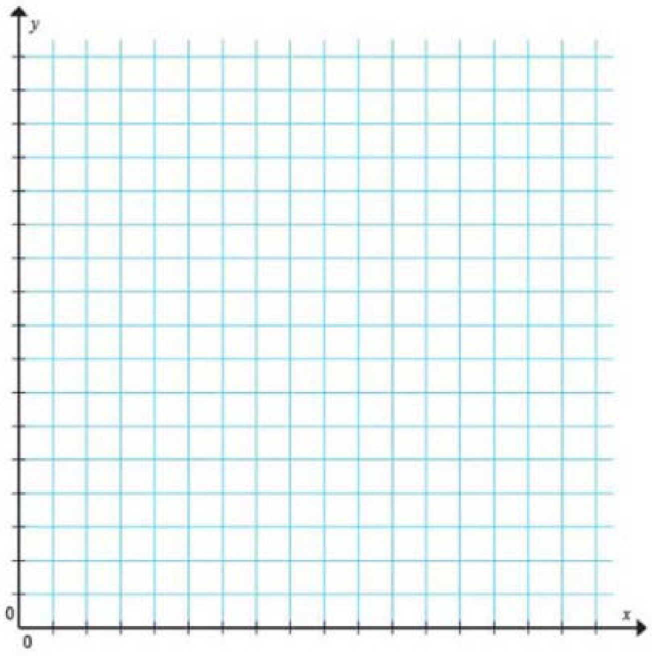
Las gráficas por secciones se obtienen al modelar situaciones en las que el fenómeno a describir no necesariamente sigue un patrón definido, o no hay un movimiento regular en el fenómeno, por lo que en una parte de la representación gráfica se tiene una sección recta y en otra una curva, o bien diferentes inclinaciones para las rectas.

Para construir gráficas con secciones rectas y curvas primero se deben determinar las regiones sobre el eje x del plano, luego localizar los puntos en que se inicia y termina la recta o la curva, y posteriormente repetir el procedimiento para las otras regiones o rangos de datos.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo la siguiente actividad.

1. Consigan un palo de escoba de aproximadamente 50 cm y márquenlo cada 2 cm, anoten un número comenzando con el 0.
2. Por turnos, un compañero sujeta el palo con el extremo donde está marcado el cero hacia abajo, el otro se pone de frente y, a la cuenta de tres, el que tiene el palo lo suelta, mientras que el otro debe tratar de agarrarlo con dos dedos; cada uno registra en qué marca del palo logró sujetarlo cada vez; repitan el procedimiento al menos cinco veces cada uno.
3. Con el registro que hicieron elaboren una tabla y dibujen la gráfica que permita representar la velocidad de reacción de cada uno.



4. Interpreten la gráfica correspondiente y compárenla con la que elaboraron otros equipos.
5. Con base en las interpretaciones de las gráficas dibujadas determinen qué miembro del grupo tuvo la mejor velocidad de reacción.

TIC a tu alcance

Consulta los siguientes sitios de Internet, encontrarás importantes recursos interactivos que te ayudarán a comprender mejor el tema:

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t07_s01_descartes/index.html

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/recurso/rcr_02.php?id=1315#

http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t07_s01_descartes/doc/info.html

Probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Figura 3.52 El "bingo" es un sorteo que utiliza tarjetas marcadas con números, los cuales se obtienen al sacarlos de una tómbola.

Introducción

En ocasiones, cuando estamos frente a eventos de azar, la intuición nos lleva a pensar que un evento relativamente sencillo puede ser fácil de responder, aunque no lo sea. Tal es el caso de los sorteos que utilizan tómbolas. Comenten en grupo si conocen sorteos en los que se empleen tómbolas (figura 3.52).

En parejas, analicen y resuelvan el siguiente planteamiento.

Arturo y Edna juegan a anticipar el resultado de lanzar una moneda y un dado simultáneamente. Arturo apuesta a que la moneda va a caer sol y que el dado va a caer 3; a su vez, Edna dice que caerán águila y 5.

- ¿Quién de los dos tiene mayor probabilidad de ganar? Argumenten su respuesta.
- Arturo y Edna vuelven a jugar, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda caiga sol y el dado caiga 1?

Recuerden que dos eventos son independientes cuando la probabilidad de uno de ellos no está afectada por el resultado del otro. El conectivo lógico "y" implica que ambos sucesos independientes deben suceder a la vez.

En parejas, analicen el caso anterior a partir de las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener sol al lanzar la moneda?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dado caiga 1?
- ¿En qué evento, tirar una moneda o tirar un dado, existen más probabilidades de acertar? ¿Por qué?
- ¿Tendrá efecto la ocurrencia del evento sol al lanzar una moneda, en la ocurrencia del evento 1 al lanzar un dado?
- ¿Cómo se relacionan la probabilidad de que caiga sol con la probabilidad de que caiga 1?
- ¿Qué procedimiento podemos usar para calcular una probabilidad con dos eventos como estos? Expliquen su respuesta.

Compartan sus reflexiones con el grupo.

Construye tu conocimiento

En equipos, analicen y resuelvan los siguientes planteamientos.

1. En una urna hay 1 bola roja, 1 bola negra y 1 bola blanca. Sacamos una bola, que luego volvemos a meter en la urna:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero una bola negra y después una bola roja?

   b) Si la bola que se extrae en un primer momento no se devuelve a la urna, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca y luego una negra?

2. Analicen el *árbol de probabilidades* de la figura 3.53 y contrasten las respuestas que dieron a los problemas anteriores.
   a) ¿Las respuestas obtenidas coinciden con lo que se representa en el árbol de probabilidades? Expliquen por qué los resultados del cálculo de probabilidad que obtuvieron son similares o son diferentes a la representación gráfica.

   b) ¿Tendrá efecto la ocurrencia de la primera extracción en la ocurrencia de la segunda extracción? Argumenten su respuesta.

Figura 3.53 Árbol de probabilidades.

3. Se cuenta con un dado rojo y un dado blanco.
   a) En una tirada de ambos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener rojo 4 y blanco 6? Dibujen en su cuaderno un árbol de probabilidad para resolver el problema.
   b) ¿El resultado del dado rojo influye en el resultado del dado blanco?, ¿por qué?

   c) ¿Qué procedimiento de los utilizados han resultado útiles para calcular la probabilidad de eventos independientes?

Comparen sus procedimientos y resultados con sus compañeros de grupo.

Para obtener la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes se multiplican ambas probabilidades:

$$P(E_1 \text{ y } E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

Aplícalo

Resuelve los siguientes problemas.

1. Al jugar con una baraja de 52 cartas y dos dados, calcula la probabilidad de obtener un rey en la baraja y el número 7 en la suma de los dados. Explica cómo la calculaste.

2. Al lanzar un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener sol y un número par? Explica cómo la calculaste.

3. Si se tiene una urna cerrada con 4 bolas azules y 4 bolas verdes, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola azul y en la siguiente extracción otra bola azul si la primera extracción se devuelve? Explica cómo la calculaste.

4. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja y posteriormente una bola azul si no hay devolución de la primera extracción? Explica cómo la calculaste.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con ayuda de su docente, corríjanlas si es necesario.

Cierre

Las probabilidades individuales de los eventos se multiplican para obtener la probabilidad de ocurrencia de los dos eventos independientes. A esto se le llama *regla del producto de eventos independientes*.

Por ejemplo, en el caso de la moneda y el dado:

$P(\text{águila y } 5) = P(\text{águila}) \cdot P(5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Taller de matemáticas

En equipos, resuelvan los siguientes planteamientos en su cuaderno.

Los alumnos de tercer grado de la escuela secundaria "Benito Juárez" organizaron una rifa, cada boleto de la misma contenía la siguiente leyenda:

1. El sorteo se realizará con dos tómbolas. Los números participantes en la primera tómbola son del 1 al 10, mientras que en la segunda tómbola son del 1 al 100.
   a) ¿Qué probabilidades de ganar tiene la persona que compró este boleto?
   b) Si conocieran la probabilidad de ganar antes de comprar el boleto, ¿se arriesgarían? Expliquen su respuesta.
   c) Si se vendieron todos los boletos, ¿cuál fue la ganancia que obtuvieron?

2. Los vecinos de la colonia organizaron una rifa con un premio de $5 000 a fin de obtener fondos para ayudar en la construcción del asilo de ancianos de su comunidad.
   - La rifa contenía 30 boletas, cada una con 30 números. El precio del número es de $25.00.
   - Érica compró 5 números de una boleta.
   - Míriam compró 5 números, 3 a la boleta que vendía Luis y 2 a la boleta que vendía Alejandro.
   - David compró 4 números, 2 a Alex, 1 a Perla y 1 más a Luis.

   El sorteo considera la elección de la boleta y la elección del número ganador.
   a) ¿Cuántos números en total tiene la rifa?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Érica?
   c) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar, Érica, Míriam o David? Expliquen su respuesta.

   Al final del sorteo Érica, Míriam y David no ganaron la rifa, la ganó don Rómulo, que había comprado un solo boleto, ¿cómo justificarían este hecho?

3. Calculen las probabilidades reales de ganar en un juego de azar donde se seleccionan 6 números del 1 al 46 (los números se sacan de una urna sin reemplazo, es decir, no se regresan a la urna los que ya salieron).

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

Teselaciones de Penrose

Roger Penrose es un físico y matemático británico nacido en 1931, que por mucho tiempo enseñó Matemáticas en la Universidad de Oxford, donde también estudió temas de cosmología, como la muerte de las estrellas, el comportamiento de los hoyos negros y el origen del Universo.

En 1974 publicó un artículo en el que presentó por primera vez lo que ahora conocemos como *teselaciones de Penrose*. Estas teselaciones se encuentran en las estructuras de los cuasicristales que son relevantes en la física contemporánea.

Pero ¿qué son las teselaciones? Una *teselación* o un *teselado* es una división del plano formada por baldosas o mosaicos, los cuales se permite que varíen dentro de un número finito de formas. Por ejemplo, con baldosas en forma de un hexágono regular de lado fijo podemos dividir todo el plano:

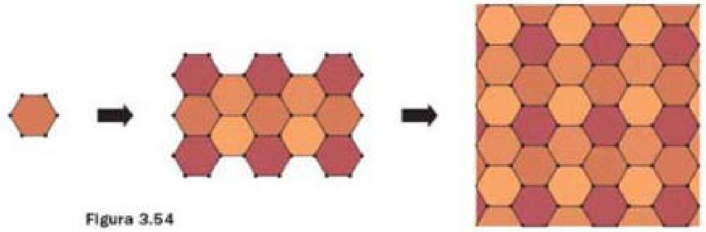


Figura 3.54

O también con baldosas de la forma de cierto pentágono irregular fijo:

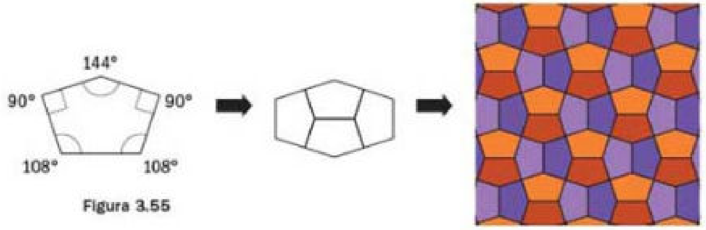
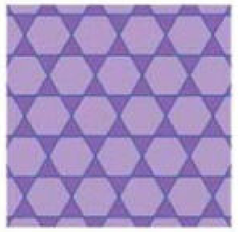


Figura 3.55

Las siguientes son teselaciones en las que se permiten dos formas distintas de baldosas:



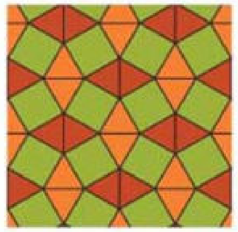


Figura 3.56

Y la siguiente es una teselación hecha de mosaicos con la forma de un muñeco con sombrero:

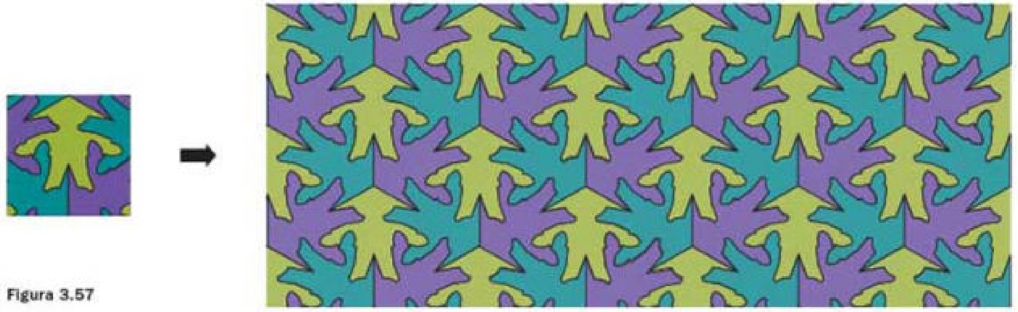


Figura 3.57

Las teselaciones se construyen utilizando un paralelogramo *ABCD* cuya longitud de cada lado sea igual a x cm, y tal que el ángulo *ABD* sea igual a 72°.

El punto *E* es el punto sobre el segmento $\overline{AC}$ cuya distancia a *A* es igual a x cm.

La idea es que si uno va juntando mosaicos con la misma forma que el paralelogramo *ABCD*, de tal modo que en los mosaicos aledaños correspondan las mismas letras en los vértices que se toquen, obtenemos una teselación.

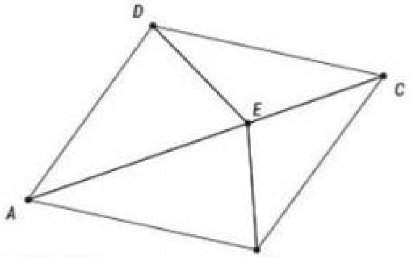


Figura 3.58

Analiza que, como los triángulos *ADE* y *ABE* son congruentes, y lo mismo para los triángulos *CDE* y *CBE*, se obtiene una teselación por mosaicos triangulares de dos tipos diferentes:

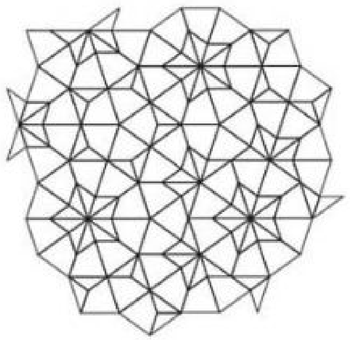


Figura 3.59

- ¿Cuáles son las medidas en grados de los ángulos interiores de los triángulos *ADE* y *CDE*?
- ¿Por qué los triángulos *ADE* y *ABE* (respectivamente los triángulos *CDE* y *CBE*) son congruentes?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{DE}$?

EVALUACIÓN TIPO PISA

Lee las siguientes situaciones y resuélvelas.

Árboles de mangos

El padre de Pedro es agricultor y quiere plantar árboles de mango en un terreno rectangular, pero para proteger los frutos de posibles intrusos debe hacer una valla con troncos de madera. En la figura 3.60 se muestra la cantidad de troncos que se necesitan, dependiendo del número de líneas de árboles de mango que el padre de Pedro quiera sembrar.

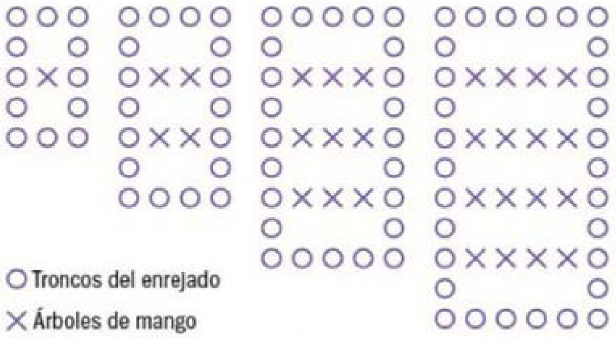


Figura 3.60

1. Completa la siguiente tabla, en la que n corresponde al número de líneas de árboles de mango en cada terreno.

n	Número de troncos	Número de árboles de mango
1	12	1
2		4
3		9
4		
5		
6		
7		

2. El agricultor sabe que si n es el número de líneas de árboles de mango en cada terreno, las siguientes fórmulas determinan el número de troncos y de árboles de mango:

   Número de troncos = $6(n + 1)$ Número de árboles de mango = n

   Hay un valor de n para el cual, el número de troncos menos el número de árboles de mango, es igual a 21. Determina dicho valor y describe el método que utilizaste para encontrarlo.

3. Al padre de Pedro le gustaría aumentar cada año su producción de mangos. Para ello tiene que ir pensando en el diseño del terreno rectangular con más líneas de árboles de mango cada vez. Conforme el terreno en el que siembre aumente de tamaño, ¿qué aumentará con mayor rapidez, el número de troncos para la valla o el número de árboles de mangos? Justifica tu respuesta.

Pintura

Angélica tiene 2 litros de pintura con los que quiere pintar algunas de las paredes (que no tienen ventanas) de la sala principal del restaurante de su familia. La figura 3.61 muestra un vista superior de la sala con las paredes que se van a pintar:

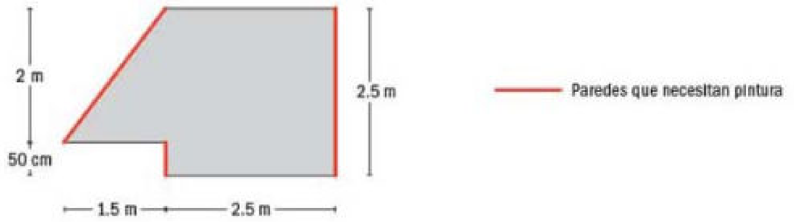


Figura 3.61

El techo del restaurante tiene 2.80 m de altura y la etiqueta del bote de pintura indica que un litro del contenido rinde 10 m² en la primera mano y 15 m² en la segunda.

1. Responde lo siguiente.
   a) ¿La pintura que tiene Angélica alcanza para dar una mano a las paredes del restaurante? Explica tu respuesta.

   b) ¿Hay suficiente pintura para dar una segunda mano a las paredes? Si la respuesta es negativa, ¿cuántos botes de pintura de un litro le hacen falta para poder hacerlo? Explica tu argumento.

EVALUACIÓN TIPO ENLACE

Figura 3.62

1. Un científico tiene un cultivo de bacterias en el laboratorio. Encontró que el crecimiento del cultivo muestra las siguientes tendencias en los meses de junio y julio (figura 3.62):

   ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas (en función del tiempo, t) describe el crecimiento del cultivo de bacterias durante la primera quincena de julio?

   a) $t^2 + 100$
   b) $t + 100$
   c) $t^2 + 1000$
   d) $t + 900$

2. Arturo hizo un corte paralelo a la base de un cono a una distancia de 12 cm del vértice, como se muestra en la figura 3.63:

   ¿Cuál es el radio r de la circunferencia que queda al hacer el corte?

   a) 25
   b) 5
   c) 18
   d) no se puede saber

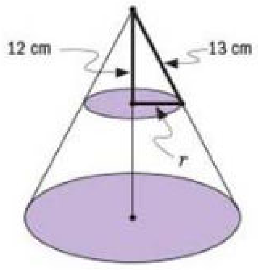
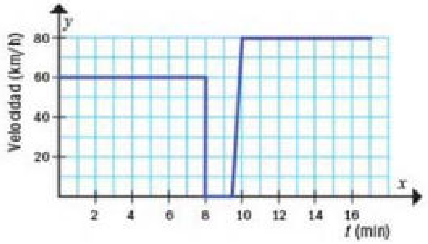


Figura 3.63

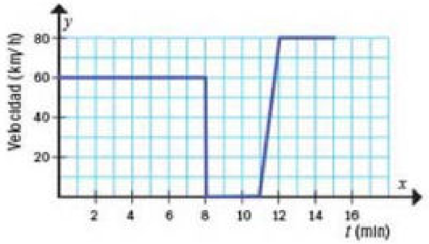
3. El trayecto del taxi que Pablo tomó en la mañana para ir al trabajo tuvo las siguientes características: el conductor aceleró de manera constante durante los primeros 2 minutos hasta desembocar al periférico de la ciudad, en el que manejó a una velocidad constante durante varios minutos. En la glorieta en la que pretendió cambiar de vía se encontró con un auto descompuesto que lo hizo detenerse durante un minuto y medio; sin embargo, al reanudar la marcha logró llegar a una velocidad de 80 km/h.

   Indica la gráfica que represente el trayecto del taxi de Pablo.

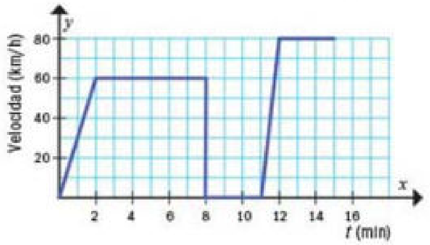
a)



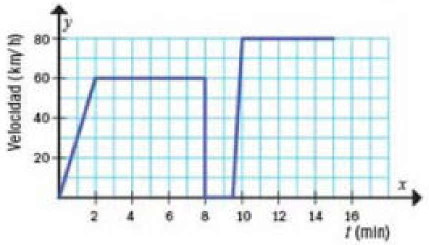
b)



c)



d)



EVALUAR PARA APRENDER

Completa la siguiente tabla, para ello reflexiona sobre cada indicador de aprendizaje del bloque.

Aspectos a evaluar	¿Qué hice para lograrlo?	¿A qué dificultades me enfrenté?
Entiendo el enunciado del teorema de Tales.		
Conozco la fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación general de segundo grado.		
Puedo distinguir entre la gráfica de una función cuadrática y la de una función lineal.		
Sé identificar si dos triángulos son congruentes o semejantes con ayuda de los criterios que relacionan sus ángulos y/o sus lados.		
Puedo construir un triángulo semejante a un triángulo dado con una razón de semejanza determinada.		

Valora tus actitudes para el trabajo en equipo. Responde en tu cuaderno.

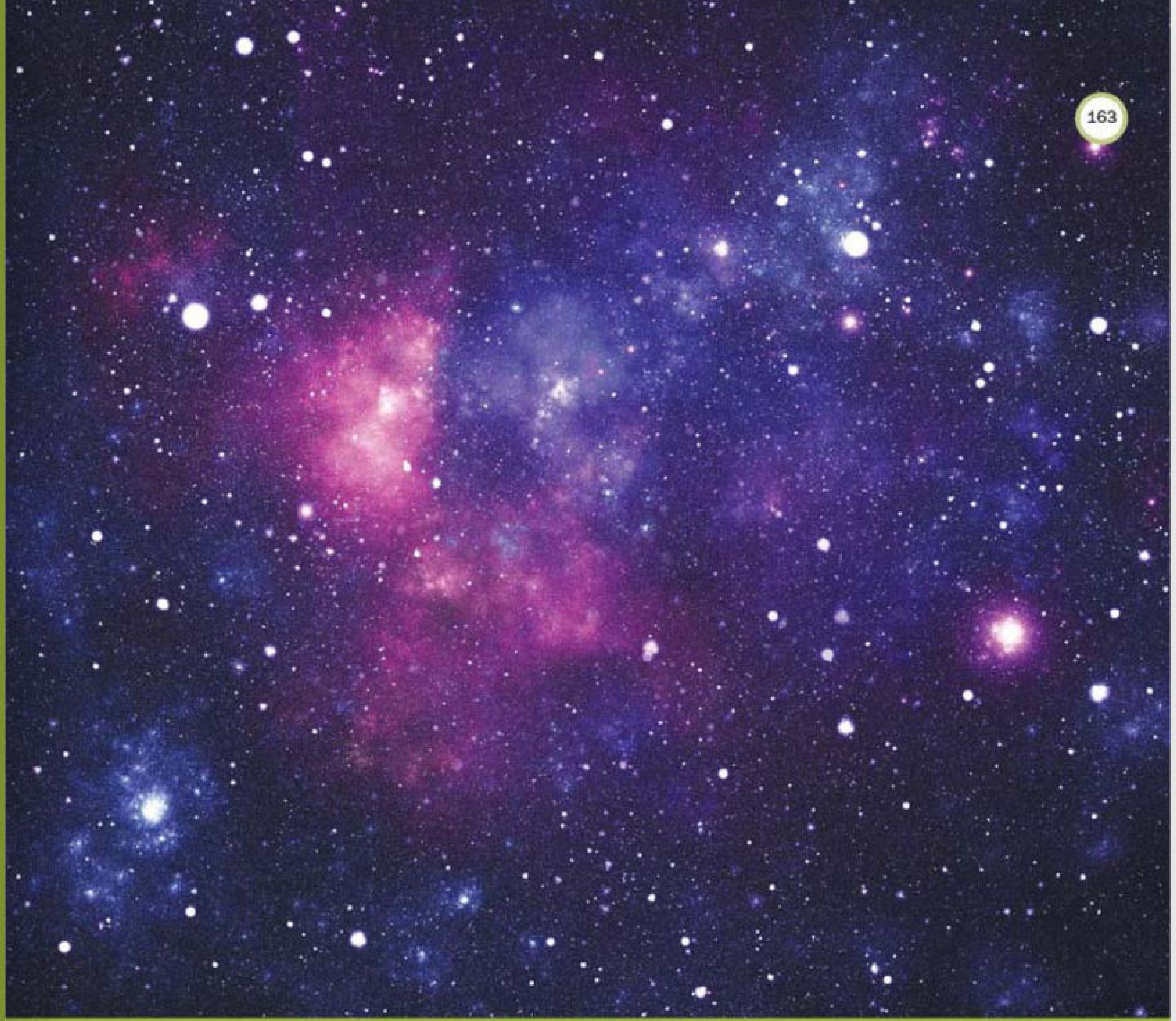
a) ¿Cómo fue mi participación durante las actividades colaborativas?
b) ¿Qué actitudes y valores puse en práctica al emitir opiniones y escuchar las de mis compañeros?
c) Solicita a tu docente que escriba algunas sugerencias para ayudarte a lograr los aprendizajes esperados y a mejorar tus actitudes en el trabajo en equipo, así como tu tolerancia e inclusión de tus compañeros en las actividades escolares.
d) Solicita a uno de tus padres o a tu tutor que lea tu autoevaluación y los comentarios de tu docente. Pide que te escriba algunas recomendaciones para mejorar tu proceso de aprendizaje. Asimismo, si es necesario, que escriba algún comentario para tu docente.

B4

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN
• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.

APRENDIZAJES ESPERADOS
• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. • Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

EJES	TEMAS
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.
Forma, espacio y medida	**Figuras y cuerpos** • Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. **Medida** • Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. • Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa. **Análisis y representación de datos** • Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.



Estrellas en el universo.

¿Sabes a qué distancia está la estrella más cercana a nuestro sistema solar?

Las galaxias son conjuntos de estrellas, algunas como nuestro Sol, otras más grandes o más pequeñas, y todas emiten luz en diferentes frecuencias, que corresponden a distintos colores.

¿QUÉ TANTO SABES?

Esta sección está diseñada para que reconozcas lo que has aprendido en tus cursos anteriores de Matemáticas, y que ahora utilizarás para comprender los temas de este bloque.

1. Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes expresiones.

   a) $9x + 9 = x$ ______

   b) $5x = 25$ ______

   c) $-3t = 9$ ______

   d) $(u)(u) = 49$ ______

2. Desarrolla las siguientes operaciones.

   a) $(x)(x) =$ ______

   b) $(y + 1)y =$ ______

   c) $(v + 1)(v + 1) =$ ______

   d) $(a + 1)(a - 1) =$ ______

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones se refiere al cuadrado de un número, disminuido en 3? Subráyala.

   a) $3 - z^2$ b) $(z - 3)^2$ c) $z^2 - 3$ d) $-3z^2$

4. Factoriza las siguientes expresiones.

   a) $x^2 - 7x + 10 =$ ______

   b) $x^2 - 2x - 15 =$ ______

   c) $x^2 - 9 =$ ______

   d) $2x^2 - 4x + 2 =$ ______

5. Si el cuadrado de un número es igual a la diferencia del doble del mismo número y uno, ¿de qué número se trata?

   a) 1   b) −1   c) 2   d) 0

6. La figura 4.1 representa un terreno rectangular que tiene un área de 108 m². Si la base mide 6 m más que el doble de la altura, ¿con cuál de las siguientes ecuaciones se puede calcular dicha altura?

   a) $2x^2 - 6x + 108 = 0$

   b) $2x^2 - 6x - 108 = 0$

   c) $2x^2 + 6x + 108 = 0$

   d) $2x^2 + 6x - 108 = 0$

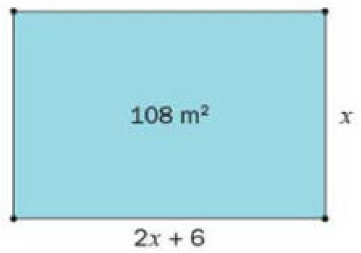


Figura 4.1

7. Analiza los triángulos de la figura 4.2 y subraya las afirmaciones que sean correctas.

   a) Son congruentes por el criterio *lal*.

   b) Son congruentes por el criterio *lll*.

   c) No hay suficiente información.

   d) Son congruentes por el criterio *ala*.

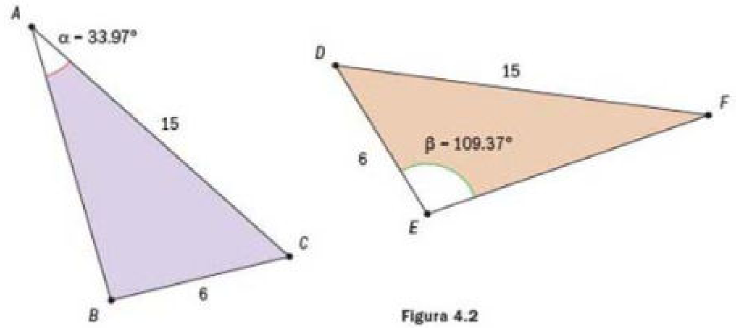


Figura 4.2

8. Los lados de un triángulo miden 5, 9 y 13 cm respectivamente. Si un triángulo semejante tiene un perímetro de 18 cm, ¿cuánto miden sus lados? Subraya la respuesta correcta.

   a) 3, 7, 8   b) $\frac{10}{3}, 6, \frac{26}{3}$ c) $\frac{11}{3}, \frac{20}{3}, \frac{23}{3}$ d) $\frac{14}{3}, \frac{22}{3}, 6$

9. ¿Cuál de las siguientes reglas describe el comportamiento de la sucesión de figuras representada en la figura 4.3? Subráyala.

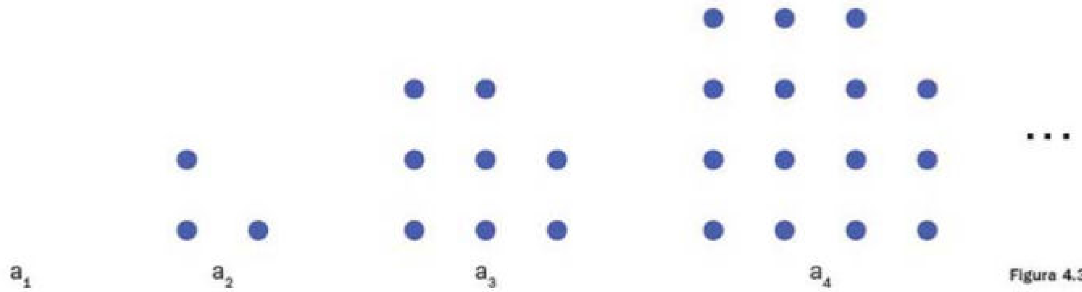


Figura 4.3

   a) El doble del subíndice menos uno.

   b) El subíndice anterior más un impar.

   c) El cuadrado del subíndice menos uno.

   d) El cuadrado del subíndice más uno.

Sucesiones cuadráticas: definición del enésimo término

Introducción

Figura 4.4

En la naturaleza hay formas que siguen ciertos *patrones* en su configuración, tales como las hojas de los helechos, las estructuras de la piña, el brócoli y la coliflor, las ramas de los árboles y el centro de un girasol (figura 4.4). Estas regularidades o patrones son importantes en la conformación de la naturaleza, pero también lo son en la vida cotidiana, ya que permiten predecir comportamientos en el campo de las matemáticas, la economía, el arte, la medicina, etcétera.

En parejas, busquen objetos en la naturaleza, en el arte y en la arquitectura con formas que presenten patrones o regularidades.

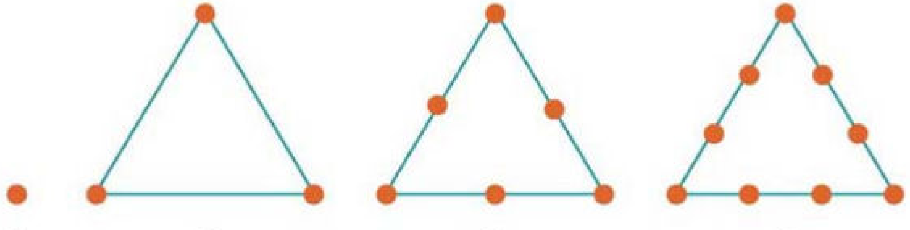
- En su cuaderno, escriban cinco ejemplos y expliquen en qué consisten esas regularidades, si es posible ilustren sus explicaciones con dibujos o recortes de periódicos y revistas que ya no utilicen. Compartan sus ejemplos con el grupo y comenten cómo decidieron si presentaban patrones o no.
- Piensen en cómo podrían describir matemáticamente los patrones de sus figuras, no es necesario que den una explicación exacta, lo importante es que propongan ideas con las que puedan obtener alguna conclusión general.

Con ayuda de su docente rectifiquen si las figuras que eligieron tienen regularidades, y si no es el caso, pídanle que les explique por qué.

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades en su cuaderno.

1. Analicen la siguiente sucesión de figuras.



   a) Determinen cuántos puntos tendrán la figura 5 y la figura 10 y expliquen cómo obtuvieron el resultado.

   b) Determinen cuál de los siguientes enunciados establece la manera en que se van formando las figuras de la sucesión. Expliquen los criterios que utilizaron para tomar su decisión.
   - El número de puntos que tiene la figura n es la suma del número de puntos que tiene la figura anterior más n.
   - El número de puntos que tiene la figura n es la suma desde 1 hasta n.

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades y respondan en su cuaderno.

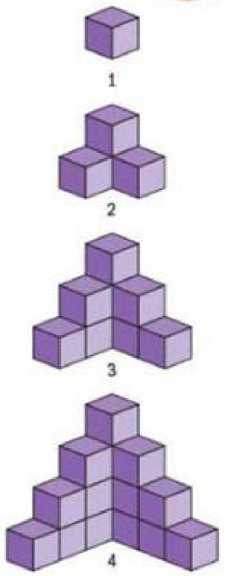


Figura 4.5

1. Analicen la sucesión de figuras (figura 4.5) y contesten las preguntas.

   a) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 5?

   b) Copien en su cuaderno la siguiente tabla y complétenla a partir de la sucesión de figuras anterior.

Número de figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Cubos que tiene	1	4						

   c) Agreguen cinco términos a la siguiente sucesión numérica:

   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ______, ______, ______, ______, ______, ______

   d) ¿Cuál es la regla que permite determinar el número de cubos que tiene la figura n?

   e) ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite determinar el número de cubos que tendrá la figura n? Comprueben su respuesta utilizando los términos que completaron en la tabla anterior.

   $5n - 4$ $\quad$ $n(n + 1)$ $\quad$ n^2 $\quad$ $2n^2 - 1$

   f) Una de las figuras está formada por 3 025 cubos, ¿qué número le corresponde a esta figura en la sucesión?

   g) Una figura que se forme con 402 cubos, ¿pertenece a la sucesión? Expliquen su respuesta.

2. Analicen la sucesión de figuras (figura 4.6) y respondan las preguntas.

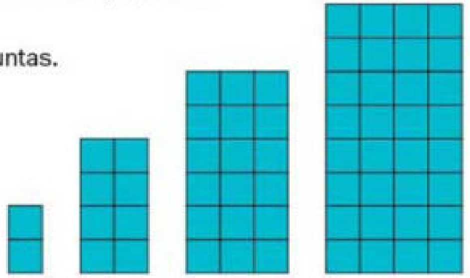


Figura 4.6

   a) ¿Cuántos cuadrados habrá en la figura 6?

   b) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite indicar, a partir del número de la figura, el número de cuadrados que tiene la misma? Comprueben su respuesta.

   $n^2 + 1$ $\quad$ $3n^2 - 1$ $\quad$ n^2 $\quad$ $2n^2$

   c) Completen la siguiente tabla para conocer el número de cuadrados que tendrán las figuras que se indican.

Número de figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de cuadrados que tiene	2	8	18	32				
Primeras diferencias términos consecutivos	8 − 2 = 6	18 − 8 = 10	32 − 18 = 14					
Segundas diferencias	10 − 6 = 4							

   d) ¿Cómo son las segundas diferencias, distintas o iguales? Expliquen su respuesta.

   e) Copien en su cuaderno la tabla del problema 1 y completen dos renglones con las primeras y las segundas diferencias. Verifiquen que también para la sucesión del primer problema las segundas diferencias sean iguales.

3. A partir de la siguiente sucesión numérica completen la tabla y calculen las primeras y las segundas diferencias (copien la tabla en su cuaderno).

5, 11, 21, 35, 53, 75, 101, 131,...

Término de la sucesión	1	2	3	4	5	6	7	8
Término de la sucesión	5	11	21	35	53	75	101	131
Primeras diferencias	$11 - 5 = 6$	$21 - 11 = 10$						
Segundas diferencias								

a) ¿A qué número son iguales las segundas diferencias?

b) Expliquen por qué si las segundas diferencias son iguales, la expresión algebraica que corresponde a la sucesión es cuadrática.

Comparen sus resultados con los del resto del grupo y comenten cómo los obtuvieron. Con ayuda del docente hagan un resumen en su cuaderno de cómo encontrar la expresión algebraica asociada a una sucesión numérica o de figuras.

Cierre

Para encontrar la expresión que corresponde a una sucesión de figuras o de números se puede emplear el método de diferencias finitas. Hagamos un ejemplo para ver cómo se usa este método. Sea la sucesión 2, 12, 28, 50, 78, 112...

Primero se elabora una tabla a fin de calcular sus diferencias.

Número de figura	1	2	3	4	5	6
Número de cuadrados que tiene	2	12	28	50	78	112
Primeras diferencias	$12 - 2 = 10$	$28 - 12 = 16$	$50 - 28 = 22$	$78 - 50 = 28$	$112 - 78 = 34$	
Segundas diferencias	$16 - 10 = 6$	$22 - 16 = 6$	$28 - 22 = 6$	$34 - 28 = 6$		

Si las segundas diferencias son iguales entre sí, entonces la expresión es de la forma $an^2 + bn + c$. Para encontrar los valores de a, b y c se hace lo siguiente.

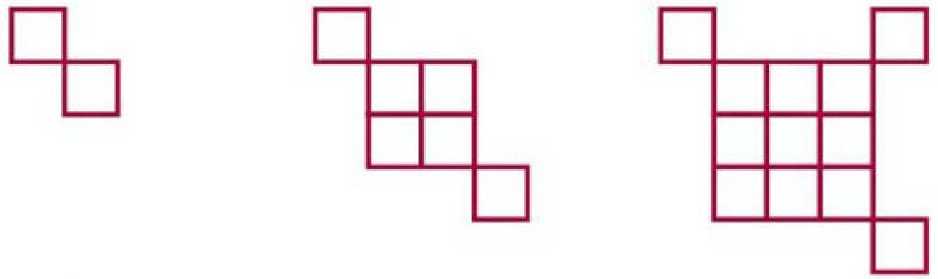
Término de la sucesión	1	2	3
Valor en la expresión $an^2 + bn + c$ al sustituir el número de término	$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$
Primeras diferencias	$4a + 2b + c - a - b - c = 3a + b$	$9a + 3b + c - 4a - 2b - c = 5a + b$	
Segundas diferencias	$5a + b - 3a - b = 2a$		

Como las segundas diferencias son iguales a 6, entonces $2a = 6$, así $a = 3$, y la diferencia de los dos primeros términos es 10; así, $3a + b = 10$. Y sustituyendo el valor obtenido de a, se tiene que $b = 1$. Finalmente, como el primer término de la sucesión es 2, entonces $a + b + c = 2$, sustituyendo en la ecuación anterior los valores obtenidos de a y b, se tiene que $c = -2$. Así, la expresión asociada a la sucesión es: $3n^2 + n - 2$.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Usen el método de diferencias de cuadrados para determinar la expresión algebraica que permite encontrar el número de cuadrados de cualquiera de los términos de la siguiente sucesión de figuras.



1 2 3

2. Encuentren la expresión algebraica que permite determinar cualquier término de la siguiente sucesión de números.

a) Sucesión: 1, 13, 33, 61, 97,...

Expresión algebraica:

b) Sucesión: 5, 12, 21, 32, 45,...

Expresión algebraica:

c) Sucesión: 0, 1, 4, 9, 16,...

Expresión algebraica:

d) Sucesión: 1, 6, 13, 22, 33,...

Expresión algebraica:

e) Sucesión: 9, 16, 25, 36, 49,...

Expresión algebraica:

Comparen sus resultados con los del resto del grupo y hagan un resumen de lo que aprendieron y de lo que saben de las sucesiones de figuras y números.

TIC a tu alcance

En la siguiente página electrónica encontrarás una aplicación para generar sucesiones numéricas:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sucesiones_progresiones_n_reales_eroquette/Sucesiones1.htm

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Introducción

Una de las primeras características visibles de un cuerpo es su forma; y sin duda, algunos de los primeros cuerpos que llamaron la atención de los seres humanos fueron el Sol y la Luna (figura 4.7).

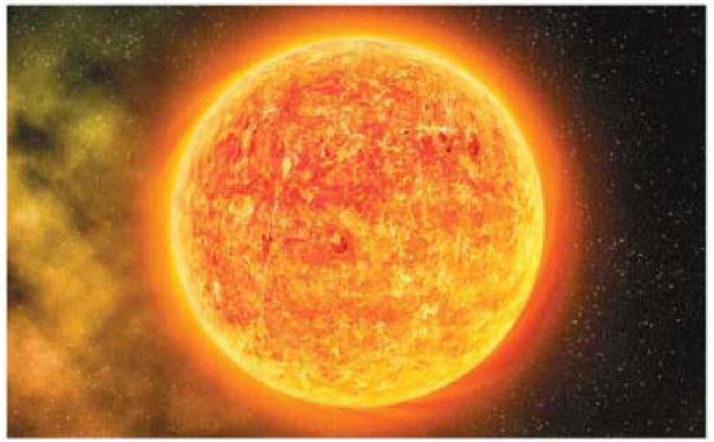


Figura 4.7 La mayoría de los cuerpos celestes –planetas, estrellas, satélites naturales– tienen forma casi esférica, como el Sol y la Luna.

Glosario

Equidistar. Dicho de un punto, de una línea, de un plano o de un sólido, que se encuentra a la misma distancia de otro.

La palabra esfera proviene del término griego *sphaîra*, que significa pelota. En geometría, una *superficie esférica* es el conjunto de los puntos en el espacio tridimensional que **equidistan** de otro al que se denomina *centro*. Los puntos cuya distancia al centro es menor que la longitud del radio de la esfera, forman el interior de la esfera.

Cuando se hace girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro, se genera la esfera como sólido de revolución, concepto que estudiaremos más adelante en esta lección.

En parejas, lean y comenten las siguientes preguntas.

- ¿Qué creen que significa el término "sólido de revolución"?
- ¿Se podrá generar una esfera si rotan un círculo alrededor de uno de sus diámetros?
- ¿Se puede generar un sólido de revolución si rotan un rectángulo alrededor de una línea horizontal que pase por la mitad del rectángulo?
- ¿Se puede obtener una esfera rotando figuras más simples?

Compartan e intercambien con el grupo sus ideas respecto a los cuerpos que se generan al rotar ciertas figuras alrededor de un eje.

Aplícalo

Lleva a cabo las siguientes actividades.

1. En hojas de papel –de preferencia reciclado– dibuja un círculo de 10 cm de diámetro, un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 y 8 cm, y un rectángulo de base 6 cm y de altura 10 cm, y luego recórtalos. Haz cuatro perforaciones en cada figura, como se muestra a la derecha.
2. Corta seis trozos de hilo grueso, pásalos por las perforaciones de las figuras y crúzalos a lo largo de ellas. Toma los extremos de los hilos, amárralos y haz que cada figura rote.

Analiza qué ocurre con las figuras mientras rotan y responde las siguientes preguntas.

a) Al rotar, las figuras describen siluetas de algunas superficies, ¿qué siluetas puedes identificar para cada figura?

b) Explica por qué se forman esas siluetas.

c) Si cambiara la posición de las perforaciones, ¿las figuras describirían las mismas siluetas al rotar?

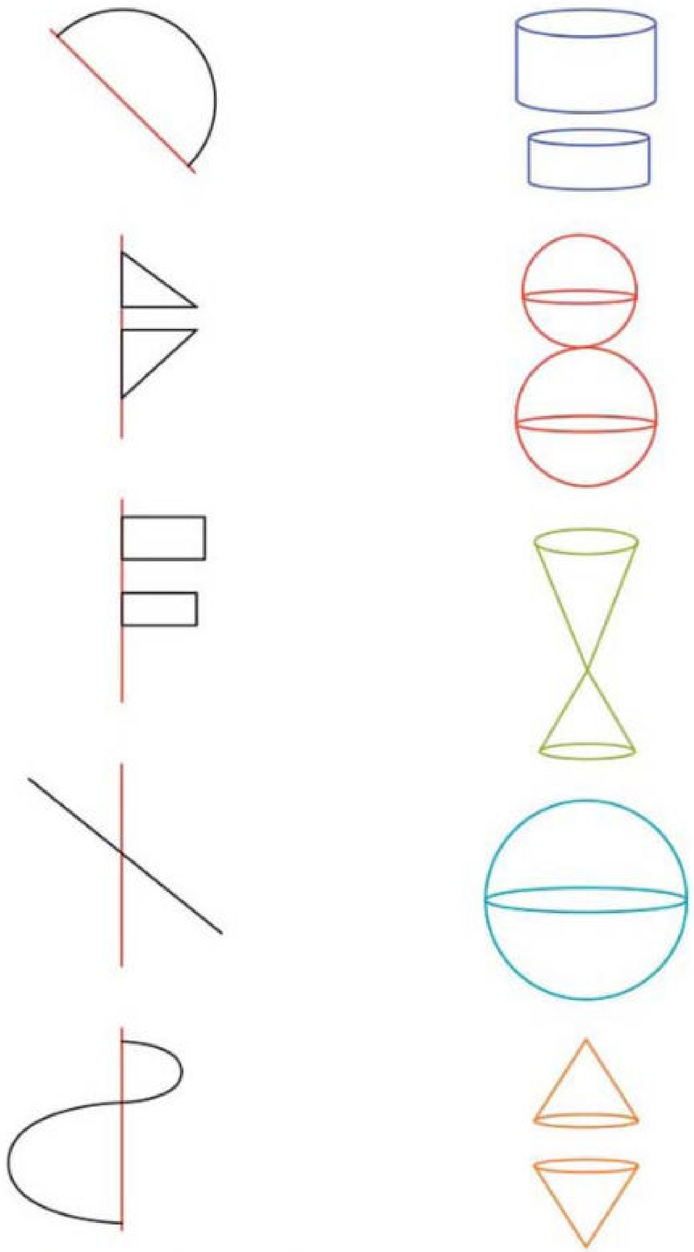
d) ¿Qué característica debe tener la posición de las perforaciones para que al rotar las figuras sí describan las mismas siluetas?

La línea recta que sirve de guía para rotar la línea se llama *eje de rotación*, y el cuerpo obtenido se llama *superficie de rotación*.

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo la siguiente actividad. En las columnas se muestran algunas superficies de rotación y las curvas que las generaron.

1. Analicen las siguientes imágenes y relacionen las superficies con su generador.



A la línea que se hace rotar para generar una superficie de rotación se le llama *generatriz*.

Aplícalo

Lleva a cabo las actividades en tu cuaderno.

1. Analiza las siguientes superficies de rotación, haz un bosquejo de su generatriz y responde las preguntas.

   a) Si cortamos la superficie de revolución con una cuchilla, perpendicularmente al eje de rotación, ¿qué figura se ve en el corte?
   b) Si cortamos la superficie de revolución con una cuchilla, a lo largo del eje de rotación, ¿qué figura se ve en el corte?

2. Consigue el tubo de un rollo de papel higiénico y un cucurucho de papel. Traza una línea recta sobre ellos, como se muestra en la figura 4.8, y recórtalos.
   a) Si desenrollas los dos objetos, ¿qué figuras reconoces?
   b) En el caso del tubo y del cucurucho, si los consideras como superficies de revolución, ¿con qué líneas los generas?
   c) ¿Será posible cortar una pelota y obtener una superficie plana? ¿Por qué?
   d) Argumenta cómo deben ser las generatrices de una superficie de revolución para que al cortarlas se obtenga una superficie plana.

Figura 4.8

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y con ayuda de su docente escriban conclusiones generales en su cuaderno.

Construye tu conocimiento

En parejas, lean los siguientes planteamientos y respondan las preguntas en su cuaderno. Argumenten todas sus respuestas.

1. Analicen la figura 4.9.

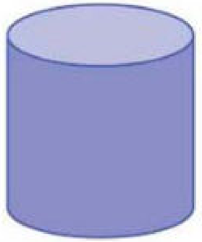
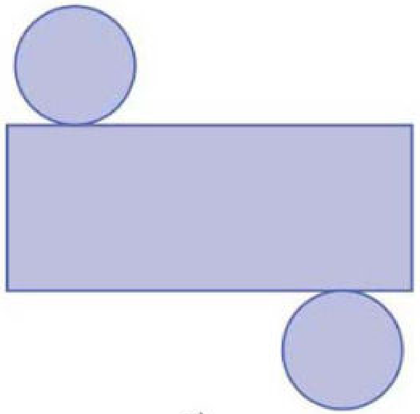
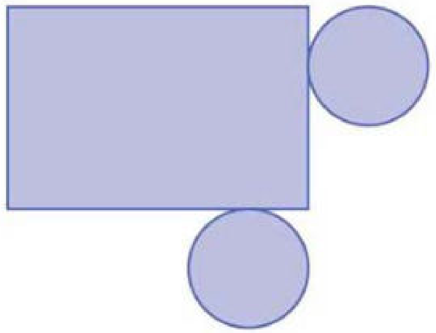


Figura 4.9

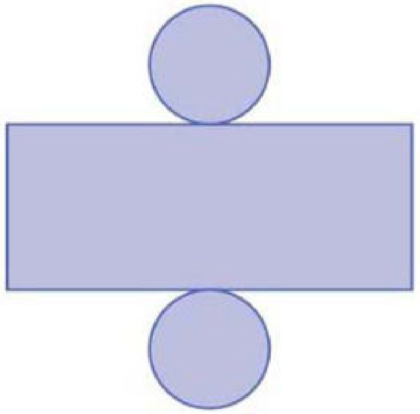
¿Con cuál de los siguientes desarrollos planos se puede construir el cilindro como el que se muestra?



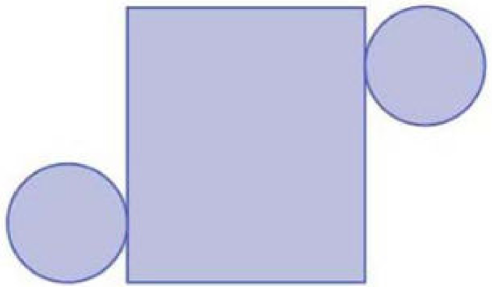
a)



b)

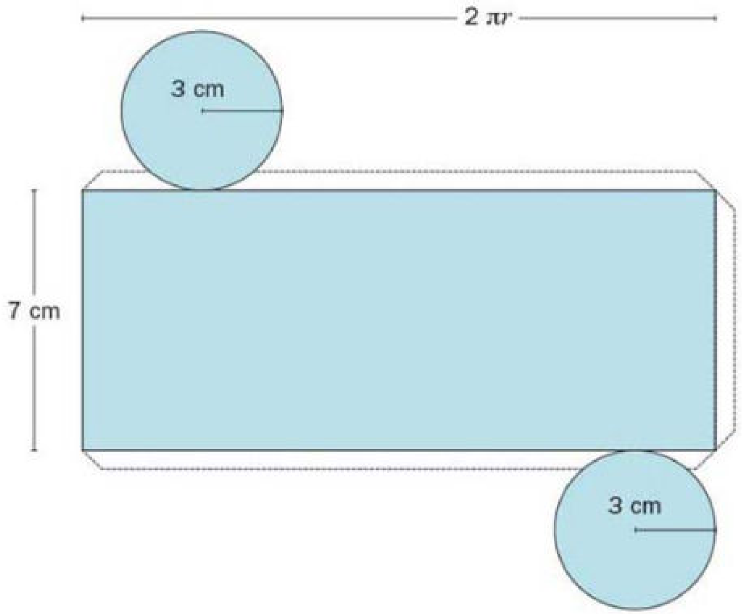


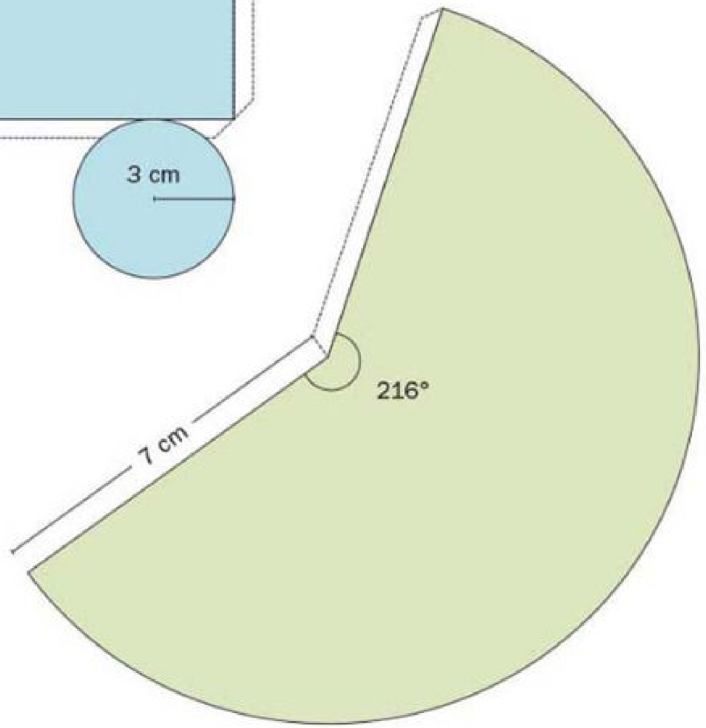
c)



d)

2. Construyan el cilindro y cono correspondientes a los siguientes desarrollos planos como se indica a continuación:





3. Si necesitamos que la altura del cilindro sea el doble, ¿cuáles serán las medidas del desarrollo plano correspondiente?

4. Si necesitamos que la altura del cono sea el doble, ¿cuáles serán las medidas del desarrollo plano?

Cuando la generatriz de una superficie de rotación es un línea recta, decimos que se trata de *superficie reglada*. Las superficies regladas se pueden aplanar al cortarlas por una generatriz y desenrrollándola. Al trazo que obtenemos se le llama desarrollo plano

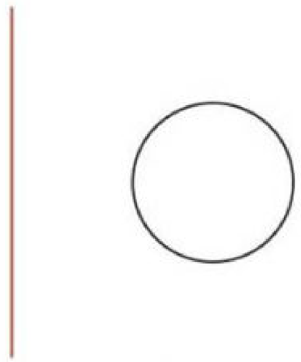
Construye tu conocimiento

En parejas, lean los siguientes planteamientos y respondan las preguntas en su cuaderno. Argumenten sus respuestas.

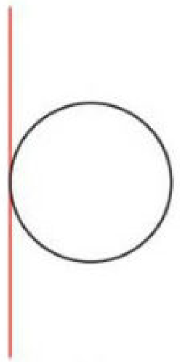
1. Si tenemos un tubo de 10 centímetros de altura y su base tiene 6 centímetro de diámetro, ¿cuál es el área de la superficie plana que lo genera?
2. Un cucurucho tiene una altura de 15 centímetros. Si el diámetro de su base es de 8 centímetros, ¿cuál es el radio del sector circular que lo genera?
3. Si el perímetro de la base de un tubo es de 15 centímetros y la altura es de 11 centímetros, ¿cuál será el área de la figura plana que lo genera?
4. Observa la figura 4.10 y explica si puede ser o no una superficie de rotación.

Figura 4.10 Toro de revolución.

¿Cuál de las siguientes curvas es su generatriz?



a)



b)

Cierre

Dadas dos líneas rectas, al girar una alrededor de la otra obtenemos una superficie denominada *cono* si las rectas se cortan, o una superficie denominada cilindro en caso de que sean paralelas.

Dado un *semicírculo*, al girarlo sobre la recta que contiene a su diámetro, obtenemos una superficie denominada esfera.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

En ocasiones podemos "salirnos" de lo convencional y permitir que la mente tenga un poco de recreo. Para generar las siguientes "superficies de revolución", además de rotar, las generatrices tuvieron otro movimiento.

1. Banda de Möbius
   a) ¿Cuál es la generatriz de la figura 4.11?
   b) ¿Qué movimientos se aplicaron para generarla?

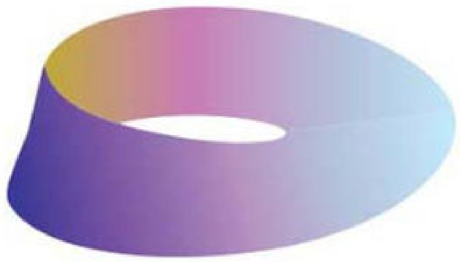


Figura 4.11 Banda de Möbius.

2. Helicoide
   a) ¿Cuál es la generatriz de la figura 4.12?
   b) ¿Qué movimientos se aplicaron para generarla?

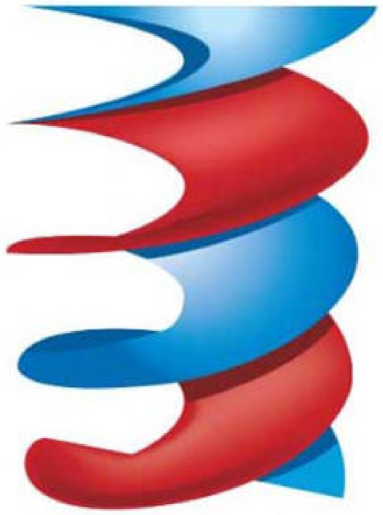


Figura 4.12 Helicoide.

3. Investiga si estas figuras existen en la naturaleza y escribe los ejemplos que encuentres.
4. Investiga si las figuras anteriores se han utilizado para construir algún dispositivo o en arquitectura y escribe los ejemplos que encuentres.

Compartan y comparen sus respuestas con otros compañeros y pidan a su docente que verifique con ustedes las actividades

Relación entre la pendiente de una recta, el ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Introducción

En lecciones anteriores estudiamos diversas situaciones que se pueden modelar mediante una expresión algebraica de la forma:

$$y = mx + b$$

donde el valor de m corresponde a la *pendiente de la recta*, y el valor de b a la *ordenada al origen*. También estudiamos que las gráficas asociadas a este tipo de expresiones son líneas rectas, puesto que se tratan de ecuaciones lineales o de primer grado. Pero, ¿qué significado geométrico tiene la pendiente?, ¿cuál es el ángulo de inclinación de una recta y con respecto a qué referencia se mide? En esta lección estudiaremos el significado y la relación entre ambos conceptos.

En parejas, lean el siguiente problema y comenten las preguntas.

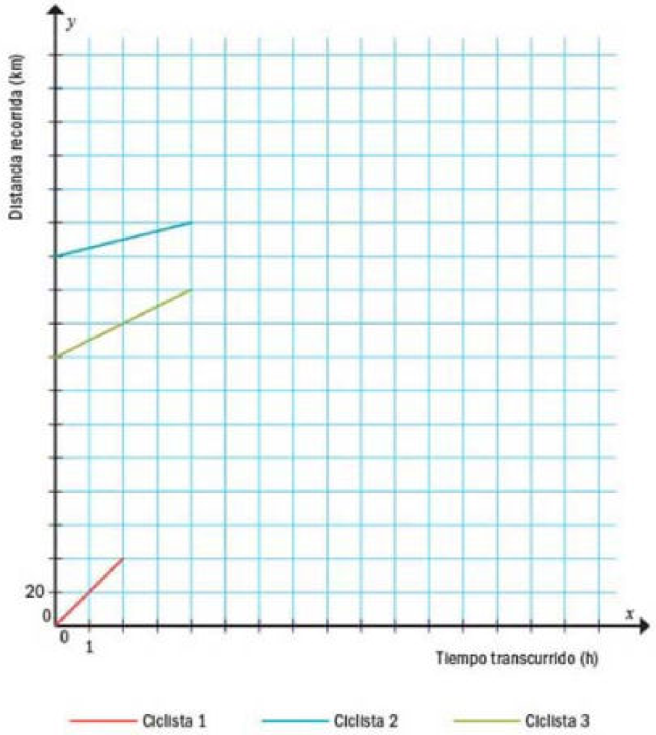


Figura 4.13

Tres ciclistas salen de diferentes puntos de una ruta que va de la ciudad de México a Chilpancingo. En la gráfica de la figura 4.13 se representa parte del recorrido de cada ciclista. Si la ruta tiene 260 Km de longitud, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué ciclista llegó primero?

b) ¿Qué ciclista llegó último?

c) ¿Qué ciclista fue a mayor velocidad?

d) ¿Qué ciclista fue a menor velocidad?

En su cuaderno, describan cómo resolvieron el problema y cómo usaron la información que proporciona la gráfica.

Al terminar, comparen sus procedimientos y respuestas con los de sus compañeros.

La pendiente de una recta

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.

1. Una empresa de transportes tiene tres modelos diferentes de autobuses. En la gráfica de la figura 4.14 se muestran los resultados de las pruebas de rendimiento que se aplicaron a los tres autobuses. Cada autobús recorrió diferentes distancias en la pista de pruebas.

   a) ¿Qué autobús le conviene más a la empresa?

   b) ¿Qué autobús le conviene menos?

   c) Indica cuál es el rendimiento de cada autobús:

   Rendimiento del autobús A: ______

   Rendimiento del autobús B: ______

   Rendimiento del autobús C: ______

   d) Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a la relación entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina consumida en el trayecto de cada autobús.

   - $y = 20x + 700$: ______
   - $y = 15x + 900$: ______
   - $y = 25x + 100$: ______

   e) ¿Qué relación hay entre el autobús con mejor rendimiento y el autobús en el que la pendiente de la expresión algebraica asociada es mayor? Explícalo.

   f) ¿Qué relación hay entre el autobús con peor rendimiento y el autobús en el que la pendiente de la expresión algebraica asociada es menor? Explícalo.

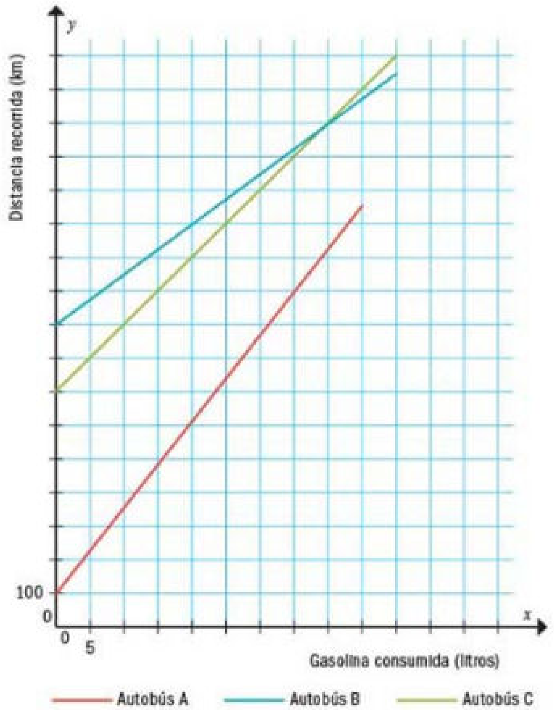


Figura 4.14

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten cómo los obtuvieron.

Entre mayor sea el rendimiento de un automóvil, la gráfica asociada es una recta cada vez más vertical.

Ángulo de inclinación de una recta

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

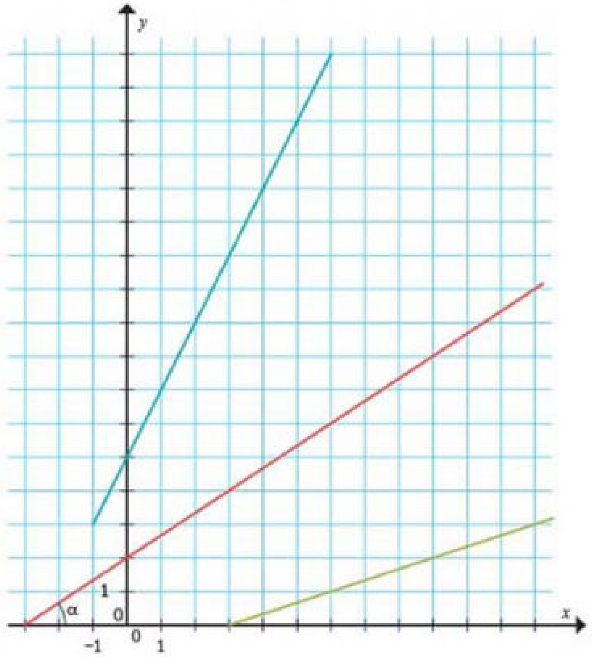


Figura 4.15

1. Analicen la gráfica de la figura 4.15 y respondan las preguntas.
   a) Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a cada recta:

   $y = \frac{x}{3} - 1$

   $y = \frac{2x}{3} + 2$

   $y = 2x + 5$

   Recta azul: ______

   Recta roja: ______

   Recta verde: ______

   b) Midan con su transportador el ángulo que forman la recta roja y el eje x y anótenlo.

   ______

   c) Hagan lo mismo para las rectas verde y azul, de ser necesario prolonguen las rectas.

   Recta roja: ______

   Recta verde: ______

   d) ¿Qué recta tiene el ángulo de mayor magnitud? ______

   e) ¿La pendiente de qué recta es mayor? ______

Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con ayuda de su docente organicen un intercambio de ideas para responder la siguiente pregunta: ¿el ángulo de inclinación de una recta con pendiente mayor que otra, es mayor que el ángulo de inclinación de la recta de menor pendiente?

Construye tu conocimiento

En tu cuaderno elabora las tablas de valores (tabulaciones) para las siguientes ecuaciones.

Recta A: $y = \frac{1}{2}x - 1$ Recta B: $y = 3x + 2$ Recta C: $y = 4x - 3$

Recta D: $y = \frac{1}{2}x + 1$ Recta E: $y = -3x + 2$ Recta F: $y = -4x - 3$

1. A partir de las ecuaciones anteriores, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué recta tendrá el mayor ángulo de inclinación respecto del eje x?
   b) ¿Qué recta tendrá el menor ángulo de inclinación respecto del eje x?
   c) ¿Qué rectas tendrán el mismo ángulo de inclinación respecto del eje x?

2. Grafica las rectas en tu cuaderno (usa un color diferente para cada recta) y responde:
   a) ¿Fueron acertadas las predicciones que hiciste el ejercicio 1? Explica tu respuesta.
   b) Explica qué cambiarías en tu predicción.
   c) ¿Qué relación encuentras entre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas? Explícalo.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analicen las diferencias y las similitudes en sus procedimientos. Con ayuda de su docente escriban en su cuaderno conclusiones con respecto a la relación entre la pendiente de una recta y su inclinación.

Relación entre el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen la gráfica (figura 4.16) y contesten las preguntas en su cuaderno. Al finalizar comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

1. Usando la información de la gráfica respondan lo que se pide.
   a) Cada uno de los ángulos marcados en los triángulos rectángulos 1, 2 y 3 mide lo mismo que el ángulo de inclinación de la recta.
   b) Calculen el cociente entre los catetos opuesto y adyacente del ángulo indicado en los triángulos 1, 2 y 3. Consideren que cada cuadrito mide 1 cm.
   c) ¿Cómo son los cocientes de los triángulos 1, 2 y 3? ¿Por qué?
   d) ¿A qué número son iguales estos cocientes en la expresión algebraica de la recta?
   e) Verifiquen que sucede lo mismo para la otra recta y los triángulos 4 y 5.

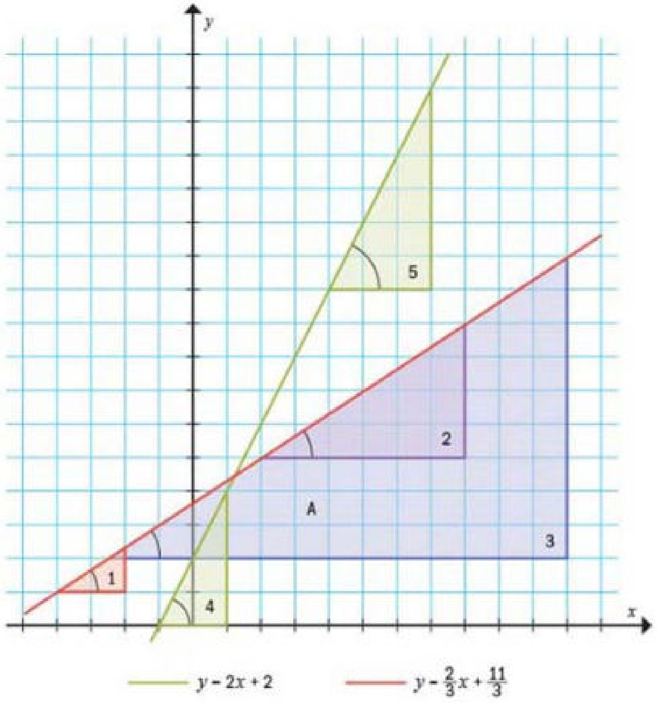


Figura 4.16

Cierre

El ángulo de inclinación de una recta en el plano cartesiano es el que se forma entre la recta y el eje x, y está relacionado directamente con la pendiente de la recta (figura 4.17).

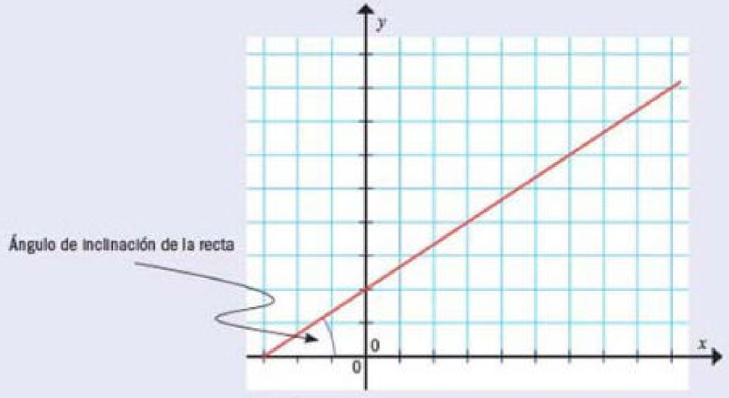


Figura 4.17

En una recta $y = mx + b$:

- Si el valor de m es positivo y menor que 1, entonces la recta se encuentra más pegada al eje x.
- Si el valor de m es positivo y mayor que 1, entonces la recta se encuentra más pegada al eje y.
- Si el valor de m es negativo y menor que −1, entonces la recta se encuentra más pegada al eje y.
- Si el valor de m es negativo y mayor que −1, entonces la recta se encuentra más pegada al eje x.

Siempre que consideramos un triángulo rectángulo donde un segmento de recta es la hipotenusa del triángulo, como en la figura 4.18, el cociente del cateto opuesto al ángulo A y el cateto adyacente al ángulo A es igual a la pendiente de la recta.

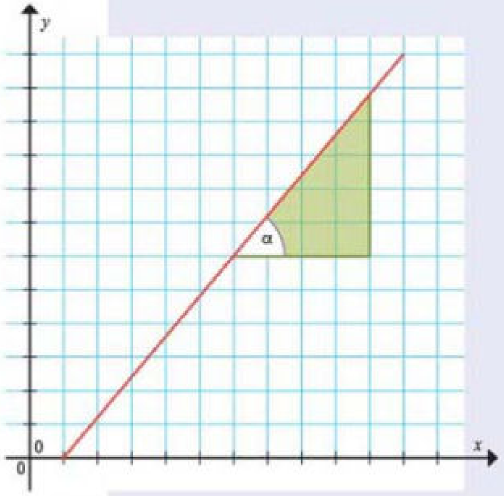


Figura 4.18

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } a}{\text{cateto adyacente al ángulo } a}$$

$$m = \frac{\text{CO al } \measuredangle a}{\text{CA al } \measuredangle a}$$

Taller de matemáticas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. La gráfica la figura 4.19 muestra las velocidades de dos vehículos.

   a) ¿Qué vehículo llegó primero? ________________

   b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada al primer vehículo? ________________

   c) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada al segundo vehículo? ________________

   d) Si un tercer vehículo tuviera una velocidad dada por la expresión $y = 3.5x + 5$, ¿en qué lugar habría llegado?

   ____

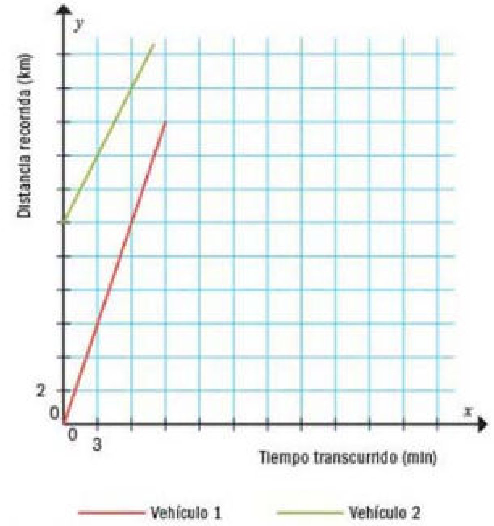
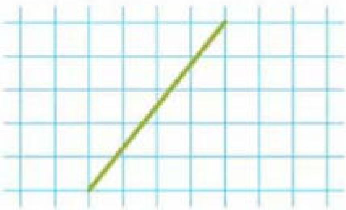
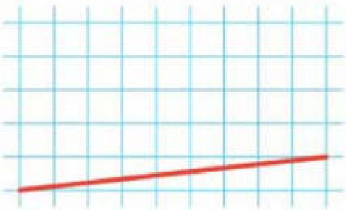


Figura 4.19

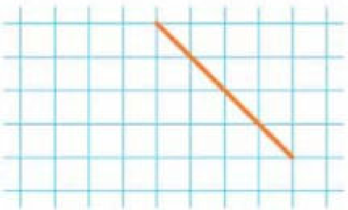
2. Determinen el valor de la pendiente para las siguientes rectas.



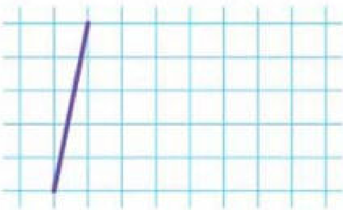
Pendiente de la recta



Pendiente de la recta



Pendiente de la recta



Pendiente de la recta

TIC a tu alcance

En la siguiente página electrónica encontrarás actividades relacionadas con la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación:
www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA23/Rectas-PlanoCartesiano.html

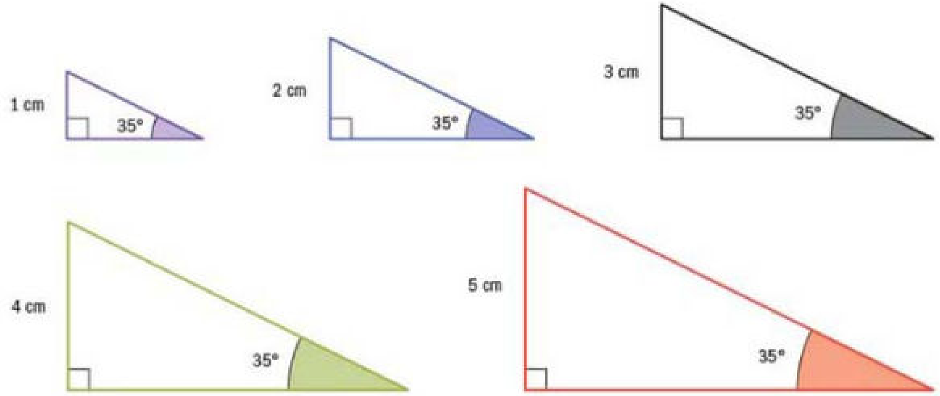
Relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo

Introducción

El *triángulo* es una de las figuras geométricas más extraordinarias, y ello tal vez se debe a su simpleza (es la primera figura geométrica), en lugar de y a las numerosas propiedades que tiene y a sus diversas aplicaciones.

Ya hemos estudiado una de las propiedades más relevantes de los triángulos rectángulos: el *teorema de Pitágoras*. La principal aplicación de este teorema se da en el cálculo de la medida de uno de los lados del triángulo, conociendo las medidas de los otros dos. En esta lección estudiaremos otra de las propiedades que involucran a cierto tipo de triángulos.

En parejas, analicen los siguientes triángulos y respondan las preguntas.



a) Expliquen por qué los triángulos anteriores son semejantes.

b) Si en lugar de conocer la medida del cateto opuesto tuvieran la medida de la hipotenusa, ¿seguirían siendo semejantes los triángulos? Justifiquen su respuesta.

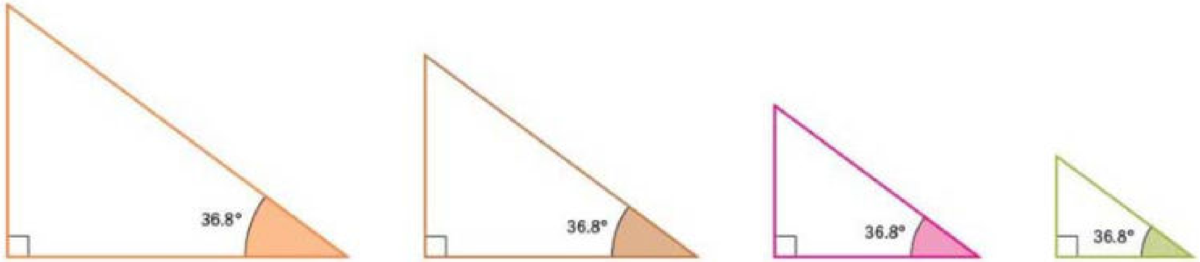
c) ¿Qué dato necesitan conocer para calcular las medidas de los lados y los ángulos que faltan?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Construye tu conocimiento

Con esta actividad aprenderán cuál es la relación de los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo y su hipotenusa. En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Los siguientes triángulos son semejantes; usando su regla calculen las medidas que se piden.



a) Para el triángulo verde, mide los lados y calcula lo que se pide.
- Medida del cateto opuesto al ángulo 36.8°:
- Medida de la hipotenusa:

b) Para el triángulo rosa, mide los lados y calcula lo que se pide.
- Medida del cateto opuesto al ángulo 36.8°:
- Medida de la hipotenusa:

c) Para el triángulo café, mide los lados y calcula lo que se pide.
- Medida del cateto opuesto al ángulo 36.8°:
- Medida de la hipotenusa:

d) Para el triángulo naranja, mide los lados y calcula lo que se pide.
- Medida del cateto opuesto al ángulo 36.8°:
- Medida de la hipotenusa:

e) Completen la tabla calculando los cocientes que se piden, al hacer las divisiones aproximen hasta milésimas.

f) ¿Cómo son entre sí los cocientes entre el cateto opuesto y la hipotenusa? ¿Por qué creen que pasa esto?

g) En su cuaderno, tracen un triángulo semejante al triángulo café, pero que la medida de los lados sea el doble de tamaño. Calculen el cociente entre el cateto opuesto al ángulo de 38.6° y la hipotenusa. Expliquen por qué este cociente es igual a los de la tabla anterior.

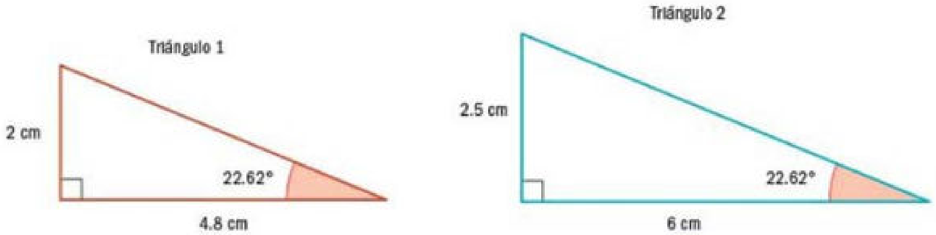
Triángulo	$\frac{co}{h}$
Verde	
Rosa	
Café	
Naranja	

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Para cada uno de los triángulos del inicio de la lección, calculen el cociente entre el cateto opuesto al ángulo de 35° y la hipotenusa, y respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.
   a) ¿Por qué el valor del cociente en los cinco triángulos no cambia?
   b) ¿Cuál es el valor del cociente?

2. Los siguientes triángulos rectángulos son semejantes, trazen en su cuaderno dos triángulos rectángulos semejantes a cada uno. Nómbrenlos triángulo 3 y triángulo 4.



3. En la siguiente tabla anoten las medidas de los cuatro triángulos.

Triángulo	Medida del CO al ángulo 22.62°	Medida del CA al ángulo 22.62°	Hipotenusa	$\frac{CO}{h}$	$\frac{CO}{CA}$

   a) ¿Cómo son entre sí los números obtenidos en la quinta columna? ¿por qué creen que sucede esto?
   b) ¿Cómo son entre sí los números obtenidos en la sexta columna? ¿Por qué creen que sucede esto?

Comparen sus resultados en grupo y con ayuda de su docente expliquen por qué en estos triángulos los cocientes indicados son iguales.

Cierre

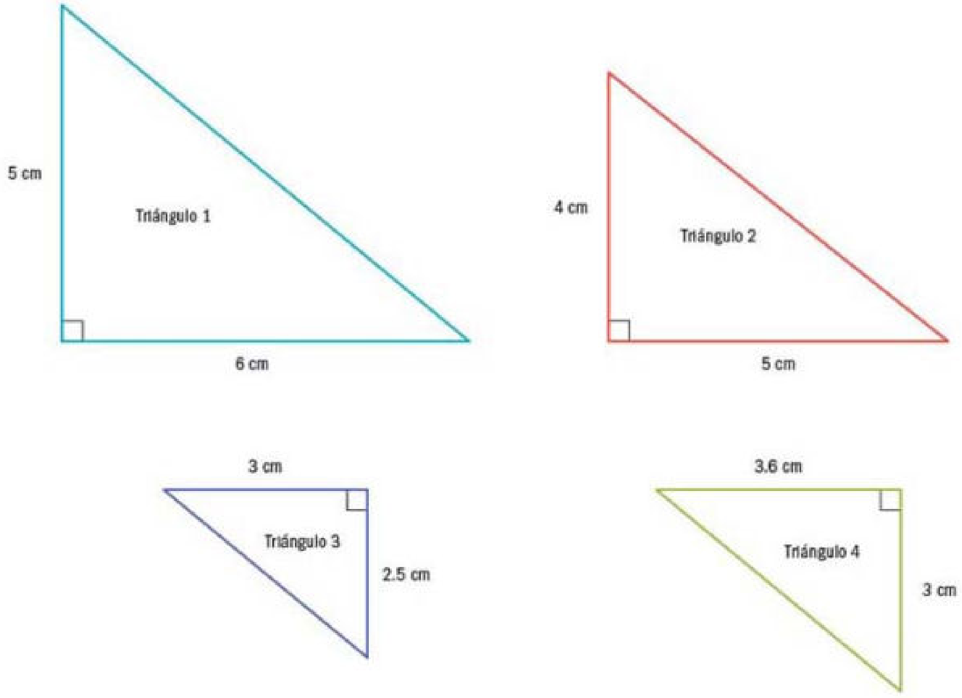
En dos triángulos rectángulos semejantes, para cualquiera de los ángulos agudos se cumple:

- El cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa siempre es igual.
- El cociente entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa siempre es igual.
- El cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente siempre es igual.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Determinen cuál de los siguientes triángulos no es semejante a los demás. Táchenlo.



   a) Expliquen por qué el triángulo que tacharon no es semejante.

2. Las siguientes son las medidas de los catetos de cuatro triángulos, determinen cuál de ellos no es semejante a los demás.
   - Triángulo 1; CO = 12.5 cm, CA = 7 cm.
   - Triángulo 2; CO = 2.5 cm, CA = 1.4 cm.
   - Triángulo 3; CO = 75 cm, CA = 7 cm.
   - Triángulo 4; CO = 25 cm, CA = 44 cm.

   a) El triángulo que no es semejante es: ________
   b) Expliquen por qué el triángulo que tacharon no es semejante.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y verifiquen si hay diferencias, de ser así, pidan a su docente que revise las actividades con ustedes.

Aplicación de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Introducción

Hasta ahora hemos estudiado diversas propiedades que se cumplen en los triángulos semejantes y que en esta lección usaremos para definir las *razones trigonométricas* de un triángulo rectángulo.

Recordemos las propiedades que se cumplen para cualesquiera dos triángulos rectángulos (figura 4.20):

- El cociente del cateto opuesto y la hipotenusa de un mismo ángulo no cambia.
- El cociente del cateto adyacente y la hipotenusa de un mismo ángulo no cambia.
- El cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente de un mismo ángulo no cambia.

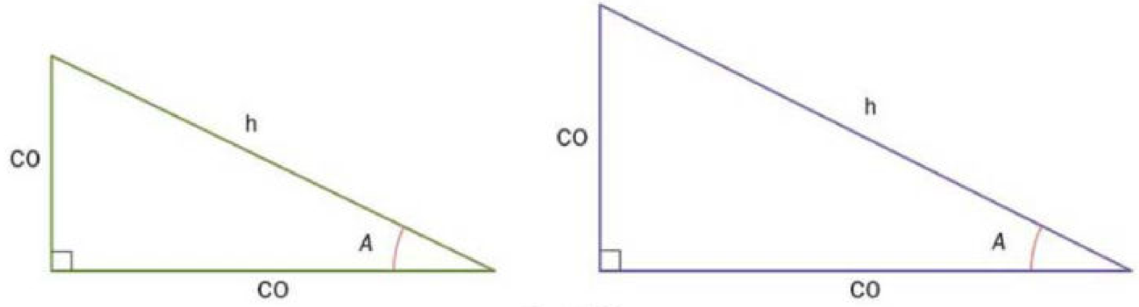


Figura 4.20

Al ángulo *A* se le pueden asociar cualquiera de los tres cocientes anteriores que no cambian; estos valores reciben nombres especiales:

- El seno del ángulo, $sen(A)$, es el cociente del cateto opuesto y la hipotenusa.
- El coseno del ángulo, $cos(A)$, es el cociente del cateto adyacente y la hipotenusa.
- La tangente del ángulo, $tan(A)$, es el cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente.

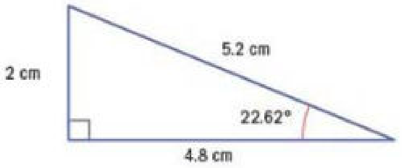
A estos cocientes se les denomina *razones* trigonométricas.

Glosario

Trigonometría. *Rama de las matemáticas que estudia los elementos de los triángulos planos y esféricos.*

Por ejemplo:

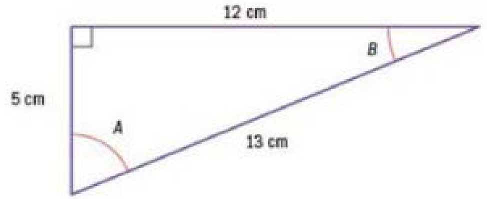
- $sen(22.62°) \approx \frac{2}{5.2} \approx 0.3846$
- $cos(22.62°) \approx \frac{4.8}{5.2} \approx 0.923$
- $tan(22.62°) \approx \frac{2}{4.8} \approx 0.416$

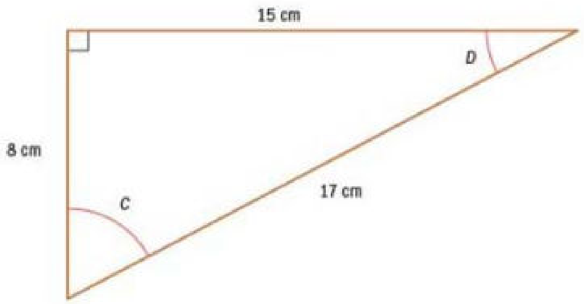


Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las actividades que se indican.

1. Calculen las razones trigonométricas de los ángulos *A*, *B*, *C* y *D* en los siguientes triángulos.





$sen(A) =$ ______ $sen(B) =$ ______ $sen(C) =$ ______ $sen(D) =$ ______

$cos(A) =$ ______ $cos(B) =$ ______ $cos(C) =$ ______ $cos(D) =$ ______

$tan(A) =$ ______ $tan(B) =$ ______ $tan(C) =$ ______ $tan(D) =$ ______

Construye tu conocimiento

En esta actividad analizarán la relación entre las razones trigonométricas y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. En parejas, resuelvan los siguientes planteamientos.

1. Sabiendo que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, respondan las preguntas basándose en el triángulo rectángulo de la figura 4.21.
   a) ¿Cómo es el valor del seno del ángulo *F* respecto al valor del coseno del ángulo *E*?
   b) ¿Cómo es el valor del coseno del ángulo *F* respecto al valor del seno del ángulo *E*? ¿Por qué creen que pasa esto? Explíquenlo.
   c) Multipliquen el valor de la $tan\ F$ por el valor de la $tan\ E$, ¿cuál es el resultado?
   d) Repitan los incisos anteriores para el triángulo morado y el triángulo café de la actividad al inicio de la página.

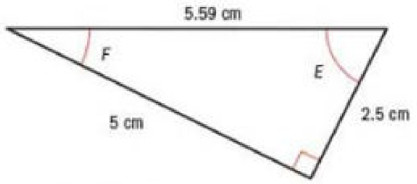


Figura 4.21 Triángulo rectángulo.

A partir de sus respuestas y con ayuda de su docente, definan las relaciones que encontraron en esta actividad.

Teorema de Pitágoras: cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo podemos calcular la medida de un lado si conocemos la medida de los otros dos mediante el teorema de Pitágoras (figura 4.22).

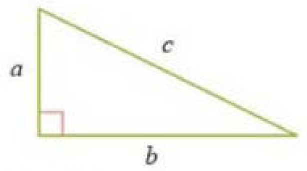


Figura 4.22

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Teorema de Pitágoras
$a^2 + b^2 = c^2$

El teorema de Pitágoras dice que *"el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*.

Construye tu conocimiento

Tomando en cuenta que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, en parejas lleven a cabo las siguientes actividades.

1. El triángulo rectángulo de la figura 4.23, es un triángulo isósceles.
   a) Usen el teorema de Pitágoras y su calculadora para encontrar el valor de la hipotenusa, den una aproximación hasta centésimos.

   ____

   b) Expliquen por qué los ángulos *A* y *B* miden 45°:

   ____
   ____

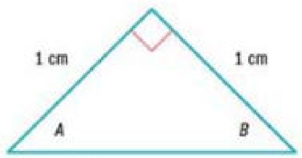


Figura 4.23

   c) Calculen las razones trigonométricas para el ángulo de 45°.
   - *sen* (45°) = __________
   - *cos* (45°) = __________
   - *tan* (45°) = __________

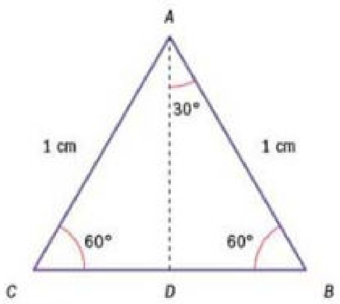


Figura 4.24

2. En el triángulo equilátero de la figura 4.24 se trazó su altura.
   a) En parejas, analicen por qué el ∠*ABD* es un triángulo rectángulo, y anoten su conclusión.

   ____
   ____
   ____

   b) ¿Cuánto mide el lado *BD*? __________

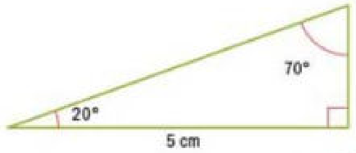
   c) Usando el teorema de Pitágoras y su calculadora, encuentren la medida del lado AD, aproximen hasta centésimos.

   ____

   d) Calculen las razones trigonométricas para el ángulo de 60°.
   - *sen* (60°) = __________
   - *cos* (60°) = __________
   - *tan* (60°) = __________

   e) Calculen las razones trigonométricas para el ángulo de 30°.
   - *sen* (30°) = __________
   - *cos* (30°) = __________
   - *tan* (30°) = __________

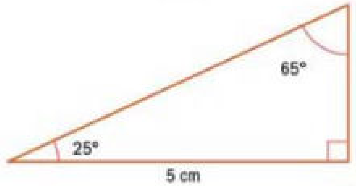
Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten cómo los obtuvieron.



Aplícalo

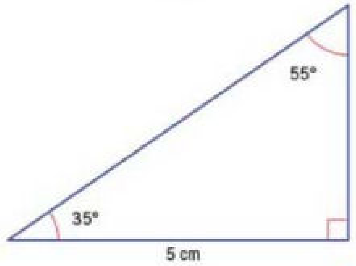
Resuelve los siguientes planteamientos en tu cuaderno.

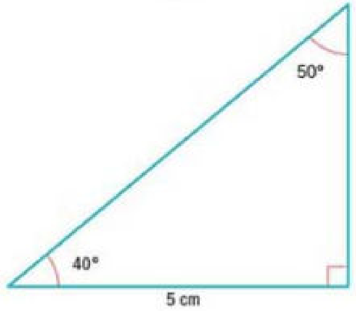
1. Encuentra las medidas que faltan para calcular las razones trigonométricas de los ángulos indicados en los triángulos de la derecha.



2. Usa las medidas que determinaste en el ejercicio anterior para calcular las razones trigonométricas de los ángulos: 20°, 25°, 35°, 40°, 50°, 55°, 65° y 70°. Anótalos en una tabla con las siguientes columnas.

Ángulo	Valor del seno	Valor del coseno	Valor de la tangente





Compara y verifica tus resultados con los de tus compañeros.

Construye tu conocimiento

En esta actividad aprenderán a utilizar las razones trigonométricas de un ángulo para resolver problemas de diversas características. En parejas, resuelvan los siguientes planteamientos.

1. Un árbol está sujetado al piso con un cable para que crezca derecho (figura 4.25); el cable mide 8 metros de largo y forma con el piso un ángulo de 62°, como en el dibujo. Realicen lo que se pide para calcular la altura del árbol.

TIC a tu alcance

En la siguiente dirección electrónica encontrarás una aplicación de las razones trigonométricas: **http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/trigonometria_aplicaciones_amb/aplicaciones.htm**

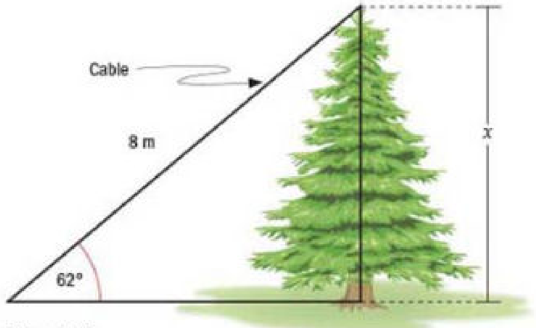


Figura 4.25

a) En el dibujo se ha marcado un triángulo rectángulo con los datos del problema, ¿se puede usar el teorema de Pitágoras para resolver el problema? Expliquen su respuesta. ____________________

____

b) Indiquen si la altura del árbol es el cateto opuesto o el cateto adyacente al ángulo de 62°. ____________________

c) ¿Qué razón trigonométrica usa el cateto que indicaron en el inciso anterior y la hipotenusa? ____________________

d) Las razones trigonométricas para el ángulo de 62° son:

α	$sen\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tan\,\alpha$
62°	0.8829	0.4694	1.88

Subrayen la igualdad que sirve para resolver el problema.

$cos\,(62°) = \frac{x}{8} = 0.4694$

$sen\,(62°) = \frac{x}{8} = 0.8829$

$tan\,(62°) = \frac{x}{8} = 1.88$

e) De la igualdad que señalaron despejen el valor de x, ¿cuál es la altura del árbol?

____

2. El **sonar** de un barco buscador de tesoros ha localizado los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 18°. La profundidad del mar es de 40 m en esa zona, como se muestra en el dibujo de la figura 4.26. Responde lo que se pide para calcular cuánto necesita nadar un buzo para llegar hasta los restos del naufragio.

En el dibujo se ha marcado un triángulo rectángulo con los datos del problema, y se nombra con la letra d a la distancia que debe nadar el buzo.

Glosario

Sonar. *Aparato que detecta la presencia y situación de objetos sumergidos mediante ondas acústicas, producidas por el propio objeto o por la reflexión de las emitidas por el aparato.*

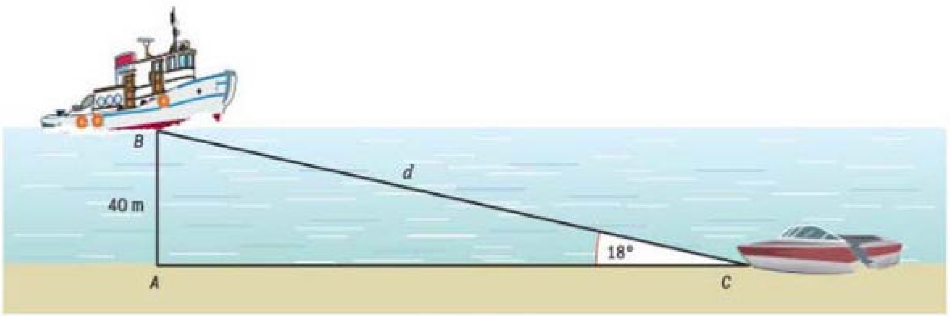


Figura 4.26

a) Para el ángulo de 18°, ¿qué razón trigonométrica usa los datos del dibujo?

____

b) Las razones trigonométricas para el ángulo de 18° son:

α	$sen\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tan\,\alpha$
18°	0.309	0.951	0.3249

c) Usa la razón trigonométrica que seleccionaste para calcular el valor de d, ¿cuál es la distancia que debe nadar el buzo?

____

Comparen sus resultados y con ayuda de su profesor expliquen cómo resolvieron los dos problemas anteriores.

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Relacionen las siguientes columnas anotando dentro del paréntesis la letra del inciso correspondiente.

( ) Cateto opuesto al ángulo *A* entre hipotenusa

( ) Cateto adyacente al ángulo *A* entre hipotenusa

( ) Cateto opuesto entre cateto adyacente al ángulo *A*

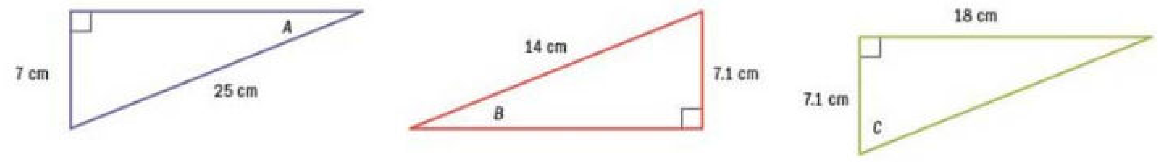
( ) Cateto adyacente entre cateto opuesto al ángulo *A*

a) Tangente del ángulo *A*

b) Seno del ángulo *A*

c) Coseno del ángulo *A*

2. Calcula las razones trigonométricas para los siguientes triángulos.



$sen(A) =$ ______ $sen(B) =$ ______ $sen(C) =$ ______

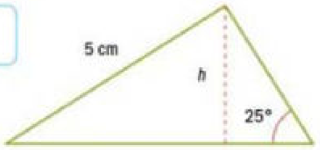
$cos(A) =$ ______ $cos(B) =$ ______ $cos(C) =$ ______

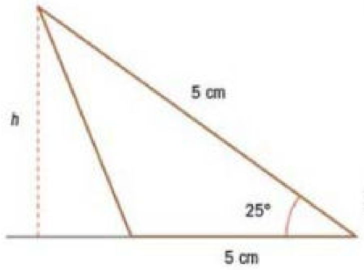
$tan(A) =$ ______ $tan(B) =$ ______ $tan(C) =$ ______

3. Usa tu calculadora para encontrar las razones trigonométricas de los ángulos que aparecen en la tabla. Si no sabes cómo hacerlo, pídele a tu docente que te enseñe. Después calcula la altura de los siguientes triángulos. Usa los valores que calculaste en la tabla anterior.

α	$sen\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tan\,\alpha$
12°	0.8829	0.4694	1.88
78°			
23°			
67°			
39°			
51°			
1°			
89°			

Altura:





Altura:

Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros.

Cierre

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo *A* es necesario construir un triángulo rectángulo que contenga dicho ángulo (figura 4.27). Después se miden los lados del triángulo y finalmente se calculan los cocientes de cada una de las razones trigonométricas.

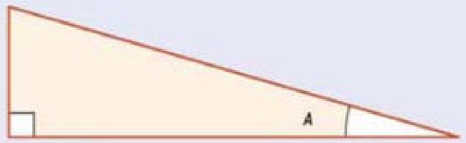


Figura 4.27

Sin embargo, como este método depende de una medición, puede ser un poco imprecisa, por ello es común que se usen las tablas trigonométricas en las que podemos buscar los valores de las razones trigonométricas o que se emplee la calculadora.

Taller de matemáticas

En parejas, resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno. Al finalizar comparen sus procedimientos y resultados con los de sus compañeros.

1. Una escalera de 3 m se encuentra apoyada en una pared, formando con el piso un ángulo de 66° (figura 4.28). ¿A qué distancia de la pared está la base de la escalera?

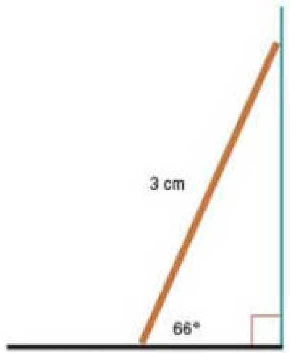


Figura 4.28

2. Dos árboles están sujetos al suelo con cables, como se muestra en la figura 4.29. ¿Cuál es la distancia de *A* a *E*?

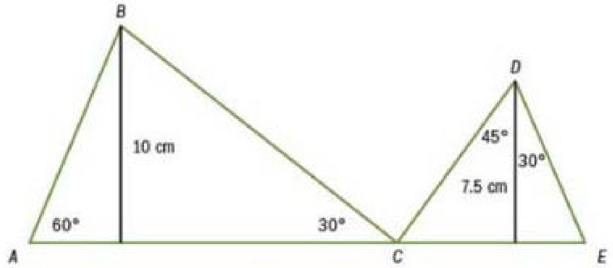


Figura 4.29

3. En la figura 4.30 se muestra una escalera del metro. ¿Qué profundidad hay entre la salida y el andén?

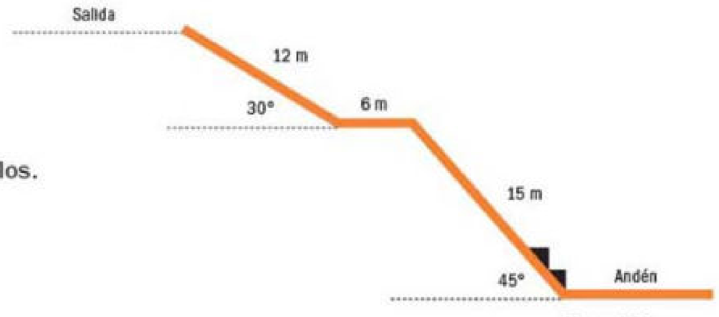
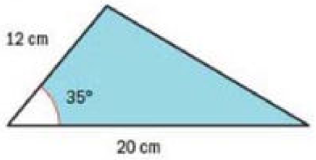
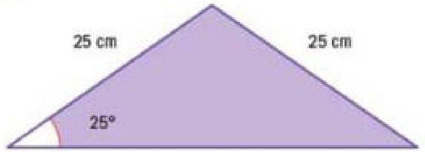


Figura 4.30

4. Calculen el área de los siguientes triángulos.





5. ¿Existe un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos agudos cumpla que el valor del coseno sea mayor que el valor de la tangente para ese ángulo? Expliquen su respuesta.

6. Si tenemos un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden *A* y *B* respectivamente, y en el que uno de los catetos mide el triple que el otro:

a) ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo *A*?

b) ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo *B*?

La razón de cambio en distintos fenómenos modelados a partir de una función lineal

Introducción

Hay aparatos que miden y representan distintos fenómenos mediante el uso de gráficas. Por ejemplo, el sismógrafo detecta ondas sísmicas generadas por terremotos o explosiones (figura 4.31), que son movimientos ondulatorios, pero las líneas que aparecen en la gráfica del sismógrafo son composiciones de líneas rectas.

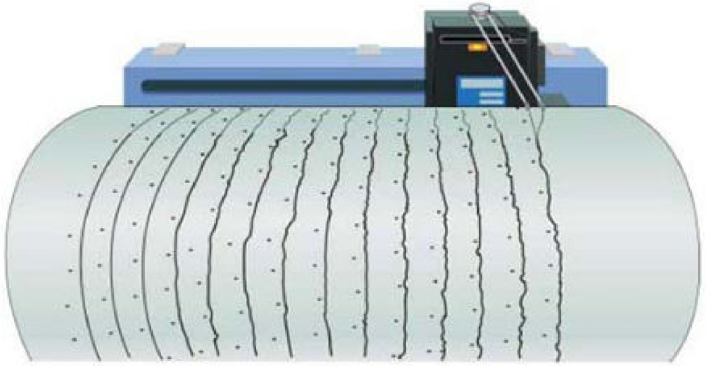


Figura 4.31 Sismógrafo.

Algunas gráficas tienen trazos en los que la línea se asemeja a una pendiente o inclinación, como sucede con ciertas señales de carretera (figura 4.32), en las que se avisa de la existencia de una pendiente pronunciada, e incluso se anota el grado de inclinación expresado en porcentaje.

- ¿Crees que se pueda calcular cuánto representa ese porcentaje en un tramo carretero? Explica cómo lo harías.
- ¿Qué datos necesitarías para realizar los cálculos?

Figura 4.32

En ciencias como la física, la química y la biología existen muchas aplicaciones de la razón de cambio, la más común y utilizada es la rapidez. Por ejemplo, en física se calcula la rapidez de un objeto mediante la razón de cambio de la distancia recorrida entre el lapso de tiempo que tardó el objeto en recorrer dicha distancia:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

En Medicina también se utiliza la razón de cambio para calcular la rapidez con que un medicamento recorre el **torrente sanguíneo**, y así determinar cuántas dosis y cada cuánto tiempo se deben aplicar para tratar cierta enfermedad. Como este, hay muchos ejemplos de aplicaciones para la razón de cambio, incluso en las Ciencias Sociales.

En equipos de tres o cuatro integrantes, piensen en ejemplos en los que se utilizan las razones de cambio para calcular cantidades. Al finalizar, compartan en grupo sus ideas y con ayuda de su docente verifiquen que sus ejemplos sean correctos.

Glosario

Torrente sanguíneo. *Curso de la sangre en el sistema circulatorio (venas, arterias, corazón).*

Construye tu conocimiento

En esta actividad aprenderás a reconocer razones de cambio en diferentes tipos de gráficas. En parejas, analicen las siguientes situaciones y respondan lo que se pide.

1. La gráfica de la figura 4.33 muestra la distancia y el tiempo que hicieron tres competidores en una carrera de motocicletas a campo traviesa; analízala y responde las preguntas.

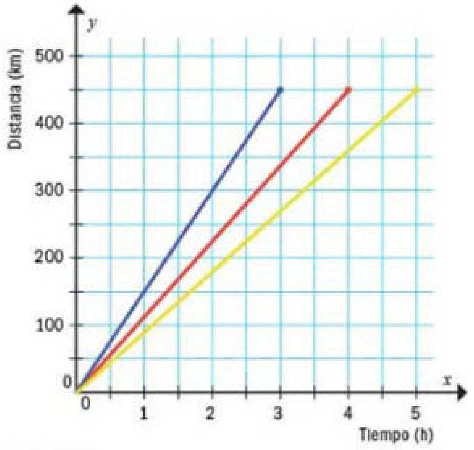


Figura 4.33

a) ¿Cuál fue la distancia total del recorrido?

____

b) ¿En qué orden llegaron los participantes y en qué tiempo hicieron el recorrido?

Rojo: __________ Tiempo: __________

Azul: __________ Tiempo: __________

Amarillo: __________ Tiempo: __________

c) Suponiendo que la velocidad de los competidores fue constante, ¿cuál fue la velocidad de cada uno?

Amarillo: __________ Rojo: __________ Azul: __________

d) ¿Qué procedimiento utilizaron para encontrar la velocidad de cada uno?

____

e) De las siguientes expresiones algebraicas, subrayen la que permite encontrar la distancia recorrida por el competidor amarillo después de una hora.

$y = x$ $\quad y = 10x$ $\quad y = 100x$

f) Escriban las expresiones algebraicas para los otros dos competidores.

Azul: __________ Rojo: __________

g) Expliquen cómo encontraron las expresiones algebraicas que describen la distancia recorrida por cada competidor.

____

h) ¿Cuál de los competidores fue más rápido durante el recorrido? ¿Por qué?

____

Comparen sus procedimientos y resultados con los de sus compañeros. Si todavía tienen dudas de cómo resolver las actividades, pregunten a su docente.

Aplícalo

Analiza los siguientes planteamientos y responde en tu cuaderno lo que se pide.

1. Los alumnos de tercer año de secundaria de la escuela "Luis de la Rosa" hicieron el siguiente experimento: colocaron un cubo de hielo en un plato de plástico a temperatura ambiente, bajo los rayos del sol, y usaron una cámara de video y un termómetro digital para analizar después con mayor detenimiento cómo cambió la temperatura durante 10 minutos.

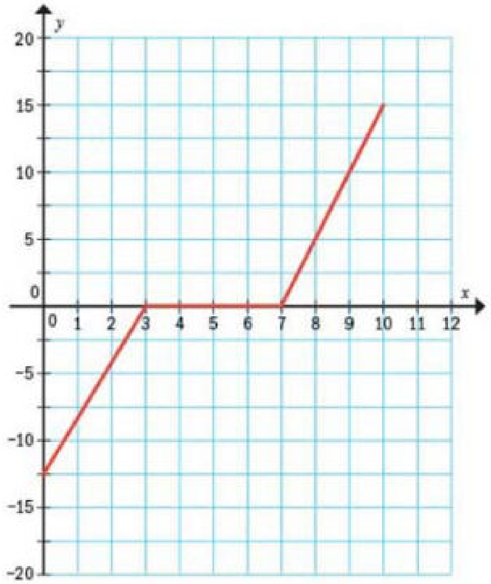


Figura 4.34

Una vez que analizaron el fenómeno, entre todos dibujaron la gráfica correspondiente en el pizarrón (figura 4.34); su maestro les pidió que redactaran un informe del experimento y que lo acompañaran con la gráfica.

a) ¿Cómo explicarías la variación de la temperatura a partir de la gráfica?

b) ¿Cuál es el comportamiento del hielo durante los primeros 3 minutos?

c) ¿Qué fenómeno se intentará explicar a partir del análisis de la variación de la temperatura con respecto al tiempo?

d) ¿Cuánto varía la temperatura por minuto a partir de que se coloca el cubo de hielo a 12 °C hasta que llega a 0 °C? Considera:

$$\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 0 y 3}}{\text{Tiempo transcurrido en ese intervalo}}$$

e) ¿En qué intervalo de tiempo no hubo cambios en la temperatura? Toma en cuenta:

$$\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 3 y 7}}{\text{Tiempo transcurrido en ese intervalo}}$$

2. Tomando como referencia las comparaciones hechas entre la variación de la temperatura con respecto al tiempo transcurrido en los dos primeros segmentos de la recta:

a) ¿Cuál es el valor del último segmento que abarca el rango de 7 a 10 minutos?

b) Si la ecuación que modela este último tramo de la recta es $y = 5x - 35$, ¿cuál es la ecuación para el primer y el segundo intervalos de tiempo?

c) ¿Cuál será el valor de la pendiente que tiene cada uno de los segmentos de recta que modelan el fenómeno que se describe en la gráfica?

d) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio que expresa la variación de la temperatura con respecto al tiempo en cada segmento de recta?

Comparen sus procedimientos y resultados con los de sus compañeros. Intercambien ideas y estrategias para la resolución de problemas.

Si todavía tienen dudas de cómo abordar las situaciones anteriores, soliciten a su docente que les explique cómo responder cada pregunta.

3. La tarifa de dos líneas de taxi son las siguientes:
   - Línea "Naranja" \$15.00 por servicio y \$2.00 por kilómetro recorrido.
   - Línea "Radiotaxi" \$20.00 por servicio y \$1.50 por kilómetro recorrido.

   a) ¿Cuál línea convendrá más tomar para hacer un recorrido de 15 kilómetros?

4. Analiza la gráfica de la figura 4.35 y a partir de ella responde las preguntas.

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la función en el costo del servicio de la línea "Naranja"? Explica tu elección.

$y = x + 15$

$y = 2x + 15$

$y = 2x$

b) Escribe la ecuación que represente la función de la línea "Radiotaxi":

c) ¿En cuántos kilómetros de recorrido el costo por el servicio de ambas líneas de taxis es el mismo? Explica tu razonamiento.

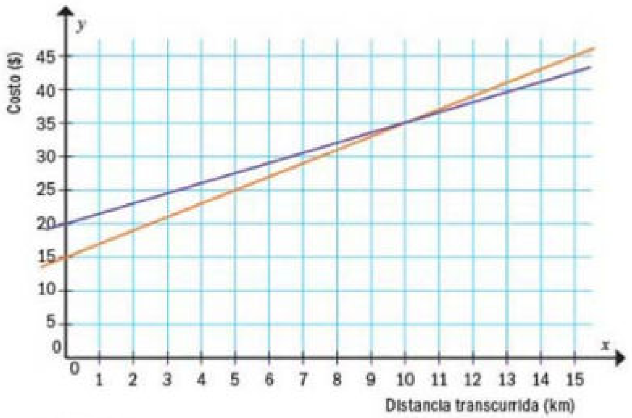


Figura 4.35

d) En una tabla con las siguientes columnas, anota los puntos que permiten trazar las rectas representadas en la gráfica anterior.

Línea Naranja		Línea Radiotaxi	
x (km)	y (\$)	x (km)	y (\$)

e) De acuerdo con las tablas, ¿de cuánto es el valor de la variación entre los kilómetros recorridos y el costo del viaje en la línea "Naranja"?

f) ¿De cuánto en la línea "Radiotaxi"?

g) Compara los valores obtenidos en cada tabla en las ordenadas (y), ¿qué característica comparten entre sí estos valores en cada tabla?

5. En el rancho de "Cueva Grande" los miembros de la cooperativa adquirieron una máquina para ordeñar las vacas y quieren comprobar su eficiencia, por lo que realizan diferentes pruebas:
   - Colocan un contenedor vacío con capacidad de 20 litros (l) en la salida de la leche, y luego de encender la máquina, ésta deja caer 4 l de leche por minuto.
   - Un segundo contenedor ya tiene 5 l de leche, y al echar a andar la máquina, ésta deja caer 4 l de leche por minuto.
   - Los cooperativistas hacen unos ajustes a la máquina y colocan un contenedor con 7 l de leche, la leche ahora chorrea a razón de 6 l por minuto.

   a) ¿En cuánto tiempo se llenará el contenedor del primer caso?

   b) ¿Cómo hicieron para saberlo?

c) Anoten las ecuaciones para los tres casos, considerando que la cantidad de leche en el contenedor (y) depende del flujo y del tiempo transcurrido (x):

d) Construyan en su cuaderno tres tablas, una para cada caso, y anoten los valores de las abscisas y las ordenadas correspondientes. Después, dibujen las gráficas correspondientes; utilicen un color distinto para representar cada función.

Cuando analizamos fenómenos en los que calculamos la razón de una variación con respecto a una magnitud dada, estamos calculando una "razón de cambio", que en el plano puede representarse mediante una línea recta.

En el caso de la carrera de motocicletas, la razón de cambio está representada por la velocidad, pues se obtiene al determinar la relación entre la distancia del recorrido y el tiempo que se invierte para alcanzarla. En este caso, para saber quién hizo más rápido el recorrido no basta con conocer la distancia total ni el tiempo transcurrido, sino que es necesario considerar la relación que hay entre el tiempo y la distancia, por ejemplo 100 km en una hora.

Si vemos las representaciones gráficas de los problemas modelados anteriormente y analizamos las coordenadas que permiten trazar las rectas correspondientes, podremos identificar que una de sus características es que la razón de cambio es constante. Sin embargo, cuando ambas variables aumentan, el aumento es positivo; mientras que en otros casos, cuando la variable x aumenta, la variable y disminuye, y entonces la razón de cambio es negativa.

La *razón de cambio* en una representación gráfica de una recta es su pendiente o grado de inclinación.

Cierre

La representación de la razón de cambio de diversos fenómenos da como resultado una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$, que a su vez puede representarse mediante una línea recta en un plano cartesiano; la inclinación (m) depende del valor de la constante de proporcionalidad directa (razón de cambio) en función del valor x, a la vez que dicha función determina el punto en que la recta debe tocar y en el plano. Entonces, una vez que se asigna un valor razonable a x, este valor puede indicarse en una tabla y en una gráfica en las *abscisas*, mientras que el valor de las *ordenadas* está determinado por la anterior función (figura 4.36).

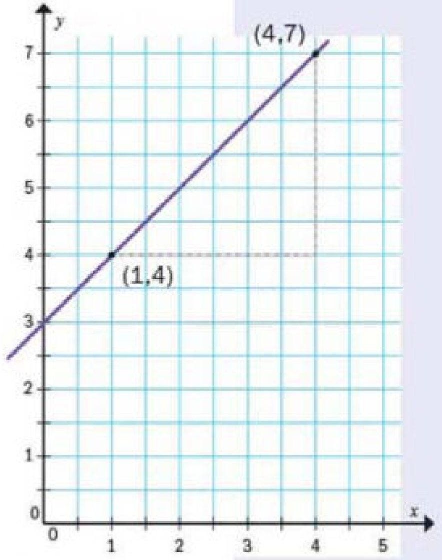


Figura 4.36

Al número representado por la letra b se le llama ordenada al origen y corresponde al punto en el cual la recta corta al eje y. En el ejemplo de los taxis, b está determinado por el costo inicial del servicio y m se determina por el aumento constante en el costo por cada kilómetro que se recorre. En el caso de funciones cuyas gráficas corresponden a rectas, la pendiente de la recta (m) es igual a la razón de cambio, y como la pendiente de una recta es constante, su razón de cambio también es constante, por lo que para calcularla se aplica el siguiente procedimiento:

Razón de cambio $(m)=\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$

Es decir, a partir de dos pares ordenados (x, y) obtenidos de la gráfica o de la tabla de valores se puede calcular la razón de cambio, siempre y cuando los valores y_2 y x_2 sean más grandes que y_1 y x_1.

Taller de matemáticas

En parejas, analicen la gráfica de la figura 4.37 para responder los planteamientos.

1. Anoten en la tabla correspondiente tres pares de coordenadas de cada recta.

Azul	
x	y

Roja	
x	y

Amarilla	
x	y

Verde	
x	y

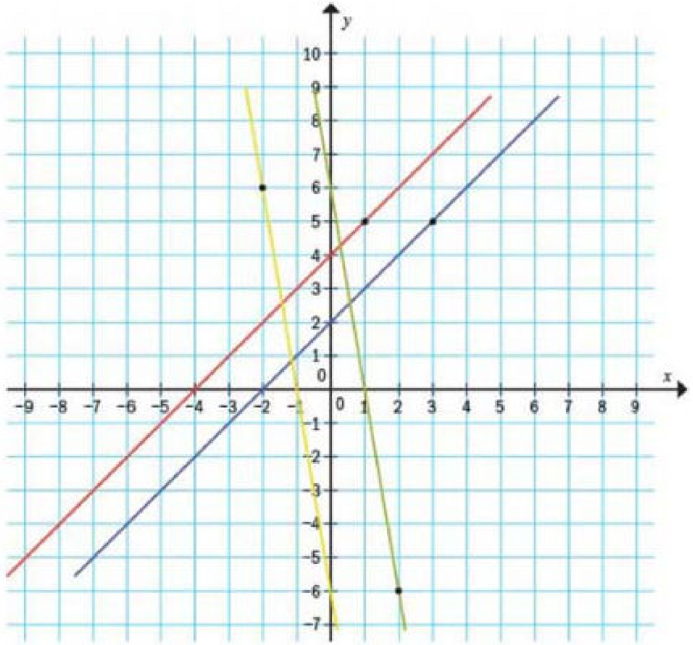


Figura 4.37

2. Escriban la ecuación que represente la función en cada recta dibujada en el plano.

a) Azul: y = ______ Roja: y = ______

b) Amarilla: y = ______ Verde: y = ______

3. Analicen y respondan en su cuaderno.

a) ¿Cómo es la recta amarilla con respecto a la verde?

b) ¿Cómo es la recta roja con respecto a la azul?

c) ¿Qué tienen en común los pares de ecuaciones de las rectas azul y roja?

d) ¿Y el par de la verde y la amarilla?

e) Dibujen en el plano una recta paralela a la verde y la amarilla, ¿cuál es la ecuación de su función?

f) Dibujen en el plano una recta paralela a la azul y a la roja, y escriban su ecuación.

4. Escriban en su cuaderno un problema que pueda modelarse a partir de la función que describe cada una de las rectas en el plano.

5. Escriban cinco preguntas que puedan responderse a partir del análisis de la gráfica.

Comparen sus procedimientos y resultados con los de sus compañeros. Intercambien ideas y estrategias para la resolución de problemas.

El significado del rango y la desviación media

Introducción

El manejo de datos estadísticos nos ayuda a representar la realidad y a comprender mejor nuestro entorno; para ello es necesario utilizar el cálculo estadístico apropiado, como veremos en el siguiente caso.

Figura 4.38 La fama de los jugadores de futbol reditúa en publicidad y ganancias para los equipos que los contratan.

El equipo de futbol de una ciudad de España paga a sus jugadores los mayores salarios a nivel mundial, con un desembolso promedio de 6.46 millones de euros anuales por jugador; su futbolista más competente recibe un sueldo de 16 millones de euros anuales (figura 4.38).

Sin embargo, el dato de la cantidad promedio no es suficiente para conocer realmente el salario de los jugadores del club, también se necesita saber cuál es la dispersión económica que el equipo realiza con el resto de sus jugadores. Es decir, cómo se distribuyen los sueldos entre los distintos jugadores que conforman dicho equipo.

En parejas, analicen el siguiente planteamiento.

En una compañía aseguradora, los agentes de ventas alcanzaron las siguientes metas en las pólizas de seguros de vida individuales durante el primer trimestre del año, cada cifra indica el valor obtenido semana a semana:

- Araceli: 4, 29, 26, 24, 22, 26, 19, 18, 20, 3, 23, 35
- Jacobo: 7, 15, 29, 24, 24, 42, 20, 17, 13, 9, 29, 20
- Luz María: 20, 18, 20, 21, 23, 23, 21, 20, 20, 21, 22, 20

a) ¿Cómo se calcula la media aritmética para cada agente de ventas?

b) ¿Qué conclusión obtendrían de los resultados?

c) Para otorgar el bono trimestral de productividad, la aseguradora considera los siguientes criterios: productividad total y consistencia en las ventas, esto es, el que obtuvo mayores ventas y tuvo menos altibajos en las ventas estando más cerca del promedio en todo momento.

d) ¿Cuál de los tres vendedores obtendría este bono? Expliquen su respuesta.

e) ¿Cuál es la relación de las ventas, con respecto al promedio a lo largo del trimestre?

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y verifíquenlas con su docente.

En los casos en que las medidas de tendencia central no brindan una idea clara de la dispersión de los datos, es necesario recurrir a cálculos que la indiquen. Entre ellos consideraremos primeramente el rango.

Al conjunto de datos comprendido entre el número mayor y el número menor del fenómeno registrado se le conoce como *rango*. Para calcular el rango es necesario restar al valor mayor de los datos el valor menor, de esta forma podemos conocer su dispersión.

$$R = D_{máx} - D_{mín}$$

Aplícalo

Retomen el problema de la aseguradora y, en parejas, analicen y resuelvan los siguientes planteamientos.

1. En una compañía aseguradora, los agentes de ventas alcanzaron las siguientes metas en las pólizas de seguros de vida individuales durante el primer trimestre del año, cada cifra indica el valor obtenido semana a semana:

Araceli: 4, 29, 26, 24, 22, 26, 19, 18, 20, 3, 23, 35

Jacobo: 7, 15, 29, 24, 24, 42, 20, 17, 13, 9, 29, 20

Luz María: 20, 18, 20, 21, 23, 23, 21, 20, 20, 21, 22, 20

a) ¿Cuál es el número mayor de ventas en una semana determinada que obtuvo cada uno en el trimestre?

Araceli ________ Jacobo ________ Luz María ________

b) ¿Cuál es el número menor de ventas que obtuvieron en una semana durante el trimestre?

Araceli ________ Jacobo ________ Luz María ________

c) Calculen el rango de ventas de pólizas de seguros de vida de cada uno de los agentes.

d) A partir de los rangos de cada uno de ellos, determinen quién tiene sus ventas más dispersas.

e) ¿Quién debe obtener el bono de productividad? Expliquen su respuesta.

____

____

f) Si sólo consideramos esta medición, ¿los resultados que obtengamos serán suficientes para comprender el comportamiento de cualquier serie de datos? Expliquen su razonamiento.

____

____

Compartan sus procedimientos y resultados con el grupo. Si hay diferencias, con ayuda de su docente obtengan las conclusiones correctas.

El rango no permite por sí solo conocer con precisión la *dispersión* de los datos, por lo que es necesario introducir otra variable. La dispersión es importante porque brinda argumentos para definir la confiabilidad de la medida de tendencia central.

Las *medidas de tendencia central* nos indican dónde se sitúa un grupo de datos que concentran su valor numérico cerca del centro de los registros, mientras que las *medidas de dispersión* nos indican si los datos están próximos entre sí o, por el contrario, están muy dispersos, es decir, muestran si están más o menos alejados de la medida aritmética.

Construye tu conocimiento

Esta actividad te permitirá relacionar las medidas de tendencia central con las medidas de dispersión. En parejas, analicen la información y resuelvan los siguientes planteamientos en su cuaderno.

1. Las ventas de autos que registró en diciembre la agencia "Autos Norteños, S. A. de C. V." fueron las siguientes:

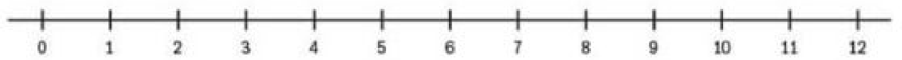
Semana 1	3	2	2	5	2	4
Semana 2	2	3	4	6	4	5
Semana 3	8	7	9	11	10	12
Semana 4	4	5	4	6	8	9

Para conocer la dispersión de un conjunto de datos primero necesitamos tener un referente, en este caso utilizarán la media aritmética o promedio.

a) Calculen el promedio mensual de ventas de esta agencia de autos.

b) En un día de ventas, ¿cuál fue la mayor cantidad de autos que se vendieron?

c) Ubiquen en una recta numérica como la siguiente, la mejor y la peor venta realizada durante el mes; localicen también el punto donde se ubica la media aritmética.



Para conocer la dispersión de los datos, aquellos que estén ubicados a la izquierda de la media aritmética se indican con signo negativo.

d) Calculen la distancia entre la mayor cantidad de autos vendidos en un día y la media aritmética mensual.

e) ¿Cuál es la distancia de las ventas promedio de la primera semana con referencia al promedio mensual?

f) Describan cómo es la dispersión de las ventas semanales con respecto al promedio mensual.

g) ¿En qué semana las ventas están más dispersas en relación con la media aritmética mensual?

h) ¿Cómo medirían la dispersión de los datos de venta de cada semana, teniendo como referencia el promedio mensual?

Comparen sus procedimientos y sus resultados con el resto del grupo. Si es necesario, corríjanlos con ayuda de su docente.

La *desviación media* es una división que se realiza entre la suma de todos los *valores absolutos* de las distancias existentes de los datos y la media aritmética, y el número total de datos, la fórmula para representarla es:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$\sum$ = Símbolo de suma

DM = Desviación media

$|x_i - x|$ = Valor absoluto de la diferencia de cada dato con respecto a la media

n = Número total de datos

Aplícalo

Analiza y resuelve los siguientes planteamientos en tu cuaderno.

1. Un dentista atendió a 10 pacientes, el tiempo que duró con cada uno de ellos fue el siguiente: 129 min, 190 min, 55 min, 88 min, 148 min, 203 min, 60 min, 154 min, 90 min, 115 min.

a) ¿Cuál es la media aritmética de la duración de la atención a sus pacientes?

b) Calcula la desviación media de las consultas.

c) Al sumar los cálculos de todas las desviaciones de los datos, ¿qué resultado se obtiene?

d) ¿Cuál es la distancia promedio con respecto a la media aritmética de la duración de la atención que el dentista brinda a sus pacientes?

e) ¿Cómo se distribuyen estos datos respecto de la media aritmética?

n	x_i min	$x_i - \bar{x}$	$\lvert xi - \bar{x} \rvert$
1	129		
2	190		
3	55		
4	88		
5	148		
6	203		
7	60		
8	154		
9	90		
10	115		

2. El rango del control de calidad válido para que el calzado de la temporada primavera-verano salga al mercado se encuentra entre los valores 70-74 o mayor. En la siguiente tabla encontramos una muestra aleatoria de 300 pares en cada línea de producción en un día de trabajo:

Tipo de calzado	Producción (calidad 65-79 o menor)	Producción (calidad 70-74)	Producción (calidad 75-79)
Sandalia	12	256	32
Vestir	4	296	0
Confort	21	223	56
Deportivo	45	105	150

a) De acuerdo con el rango del control de calidad, ¿cuántos productos han quedado fuera de la venta mensual en la muestra obtenida?

b) En este caso, ¿cuál es la importancia que tiene para la empresa el determinar el rango 70-74?

c) ¿Qué pasaría con los clientes de esta empresa si se comienzan a vender productos que se ubican dentro del rango de menor calidad?

d) ¿Cuál es la desviación media de cada rango de producción?

- Calidad 65-69
- Calidad 70-74
- Calidad 75-79

e) ¿El mayor rango semanal coincide con la mayor desviación media semanal? Argumenta tu respuesta.

f) ¿Qué decisiones debe tomar la empresa respecto a la cantidad de calzado producido en el rango 65-69?

3. Las calificaciones obtenidas en la asignatura de Matemáticas en el bimestre anterior por el grupo de tercero de la escuela secundaria técnica número 32 fueron las siguientes:

8.3, 10, 6.8, 7.0, 5, 8.5, 8.9, 6.0, 7.8, 9.3, 9.3, 8.4, 9.0, 7.5, 8.1, 6.0, 7.0, 8.2, 8.0, 7.4, 10, 8.3, 9.7, 8.5, 9.5, 5, 10, 9.0, 7.0, 6.0

a) Calcula la desviación media de estas calificaciones.

4. Identifica y describe las diferencias que existen entre el rango y la desviación media como medidas de dispersión.

Compara tus procedimientos y resultados con los del resto del grupo; si hay diferencias consulten con su docente para llegar a una conclusión general.

Cierre

Las medidas de dispersión son *indicadores estadísticos* que muestran cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

- La desviación es la distancia que hay entre la media aritmética y los datos analizados.
- El rango (R) es la medida de dispersión más sencilla, es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de una variable en un conjunto de datos.
- La desviación media (DM) es una medida de dispersión que mide el promedio de la desviación de los datos con respecto a la media aritmética.

Taller de matemáticas

En equipos, analicen y resuelvan los siguientes planteamientos.

Un censo de población cuenta cuántas personas habitan en una comunidad. Se lleva a cabo con el objetivo de planificar una serie de acciones básicas, como la planeación de los servicios de luz, alcantarillado, de salud, el número de escuelas que se requieren y en dónde construirlas, etcétera.

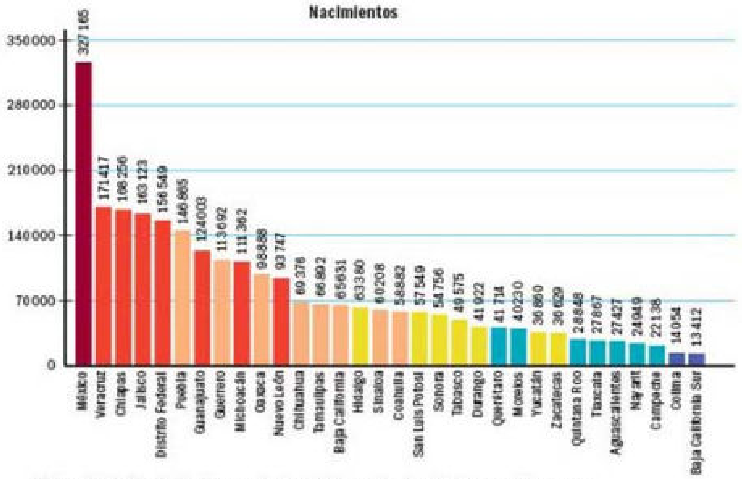


Figura 4.39 Nacimientos en el año 2011 en el país. México en cifras. INEGI. Información recuperada de: http://www3.inegi.org.mx/sistemas/statisticsexplorer/0/index.html#story=0, (Consulta: el 28 de marzo de 2013).

1. A partir de esta información, el Sistema Educativo Nacional busca conocer la cantidad de docentes y escuelas que serán necesarios para atender la educación básica en los próximos años (figura 4.39).

   a) ¿Las medidas de tendencia central –media aritmética o mediana– son útiles para saber cuántas escuelas se deben construir en cada estado? Expliquen su respuesta.

   b) ¿Cuál es la desviación media de nacimientos?

   c) ¿Cómo se interpreta la desviación media de nacimientos obtenida en Jalisco, Baja California y Distrito Federal?

2. En el huerto de doña Beatriz quieren conocer la desviación media que se da en el empaque de su producto; para ello se tomó una muestra de 20 paquetes al azar de un contenedor de 200 piezas: los resultados obtenidos al pesar las fresas se muestran en la tabla 1. Completen la tabla y resuelvan los siguientes planteamientos.

   a) De acuerdo con los datos y resultados obtenidos, ¿cuál sería el peso de los paquetes de fresa que debería ir marcado en la etiqueta del empaque? Expliquen su respuesta.

   b) Encuentren la desviación media del producto.

   c) ¿Cómo interpretan esta información a partir de los resultados obtenidos?

   d) El peso estándar que debe aparecer en el empaque se encuentra en el rango de 485 g a 515 g; en relación con este peso, ¿se satisface al público que compra fresa en todos los productos de esta muestra? Expliquen su razonamiento.

Tabla 1

n	x_i – g	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
1	505		
2	487		
3	515		
4	480		
5	501		
6	500		
7	510		
8	494		
9	508		
10	489		
11	495		
12	503		
13	524		
14	489		
15	495		
16	500		
17	510		
18	507		
19	488		
20	501		
			$\sum =$

Comparen sus procedimientos y sus resultados con el resto del grupo. Si es necesario, corríjanlos con ayuda de su docente.

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

Origen de la trigonometría

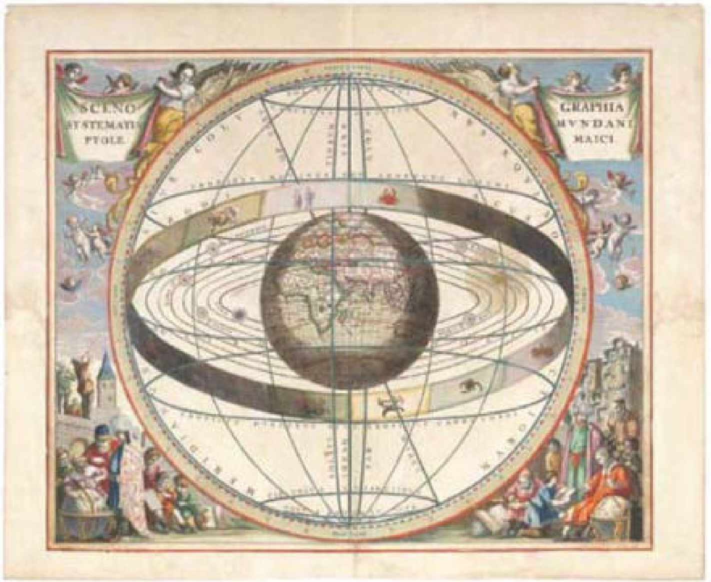


Figura 4.40 Modelo geocéntrico del universo.

Una de las primeras teorías que se tuvo acerca del universo fue la *geocéntrica* (figura 4.40), que situaba a la Tierra en el centro y alrededor de ella ocho esferas concéntricas, en las que se encontraban la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas.

Para estudiar el universo con este modelo se tenía que hacer un análisis de triángulos esféricos (figura 4.41), que son triángulos que se forman sobre la superficie de la esfera.

Estos triángulos se usaban para localizar estrellas y planetas. De esta forma surgió lo que hoy conocemos como trigonometría.

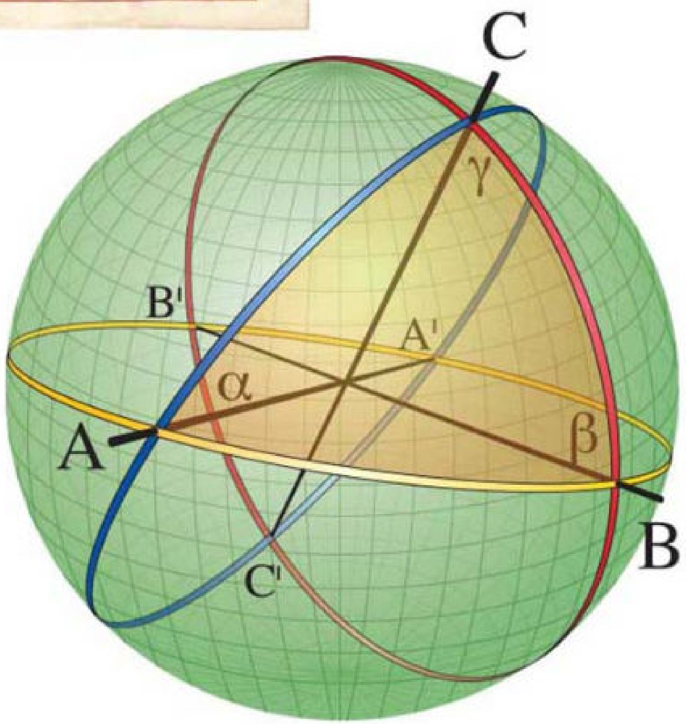


Figura 4.41 Modelo geocéntrico del universo.

Los primeros trabajos sobre trigonometría fueron realizados por el astrónomo, geógrafo y matemático griego Hiparco de Rodas (190-120 a.n.e. aprox.) y constaban de unas tablas en las que se medían las longitudes de cuerdas en una circunferencia (figura 4.42).

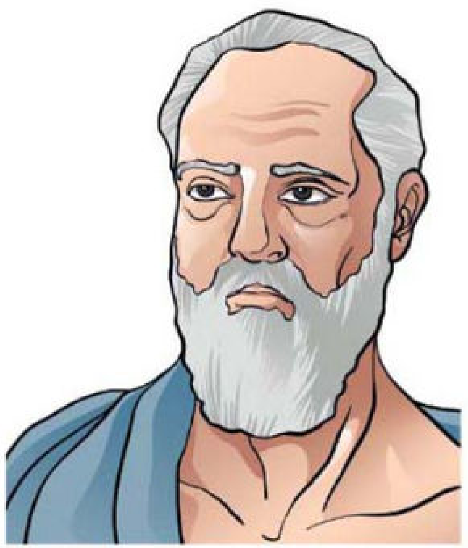


Figura 4.42 Hiparco de Rodas.

En la figura 4.43 se ve una circunferencia de radio 1, un ángulo central de medida x y una cuerda que une los puntos *A* y *B*, que están sobre la circunferencia.

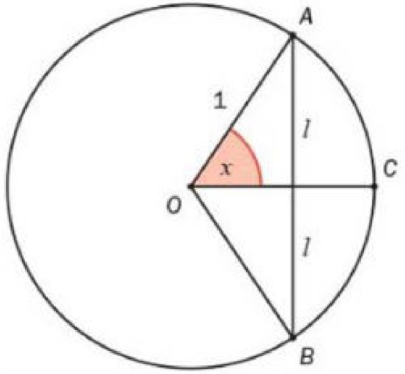


Figura 4.43

Actualmente, la medida de la cuerda podemos obtenerla por la relación:

$$l = sen(x)$$

Entonces, la longitud de la cuerda es $\overline{AB}$ es $2l = 2\ sen(x)$.

La historia de la trigonometría ha sido rastreada en varias culturas, como la babilónica, la griega, la hindú y la árabe. El hilo conductor de esta historia es la palabra seno, que probablemente sea una mala traducción.

En los trabajos del matemático hindú Aryabhata (476-550) también se pueden encontrar tablas sobre cuerdas en una circunferencia, conocidas como *jya-ardha* o simplemente *jya (figura 4.44)*. Este término fue transcrito del hindú al árabe como *jiba* o *jyb*, y en las primeras traducciones de los tratados árabes de matemáticas al latín el término *jiba* fue confundido con la palabra árabe *jaib*; esta última se refiere a la abertura de una prenda de ropa usada por las mujeres alrededor del cuello.

Al traducirse al latín, la palabra jiba se tomó como *sinus*, que puede ser *pliegue*, *pecho*, o inclusive puede interpretarse como *pechera*, si se habla de la prenda en cuestión. De todo esto obtenemos el término "seno".

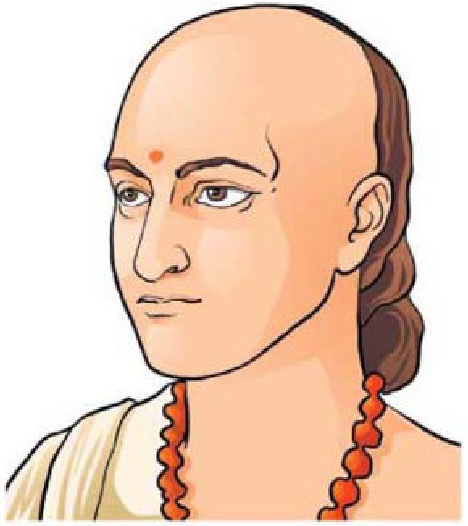
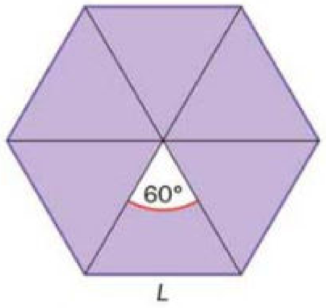


Figura 4.44 Aryabhata.

EVALUACIÓN TIPO PISA

Analiza la siguiente situación para responder las preguntas.

1. En la siguiente figura se muestra un polígono regular de 6 lados, dividido en 6 triángulos.



a) ¿Qué tipo de triángulos se forman? Argumenta tu respuesta.

b) Encuentra la expresión algebraica para calcular la altura de los triángulos, en términos de la longitud de los lados del pentágono y del ángulo central. Escriban todos sus procedimientos en el siguiente espacio.

c) Encuentra la expresión algebraica para el calcular área de los triángulos. Escribe tus procedimientos.

d) Expresa el área total del hexágono como la suma de las áreas de los triángulos.

e) Supongamos ahora que tienes un polígono regular de n lados, ¿qué tipo de triángulos se forman? Argumenta tu respuesta.

f) Encuentra la expresión algebraica para la altura de los triángulos en términos de la longitud de los lados del pentágono y del ángulo central. Escribe tus procedimientos.

g) Encuentra la expresión algebraica para el área de los triángulos. Escribe tus procedimientos.

h) Expresa el área total del polígono como la suma de las áreas de los triángulos:

EVALUACIÓN TIPO ENLACE

1. Si partimos de la sucesión: 4, 9, 16, 25, 36, ..., ¿cuál de las siguientes opciones representa el *n*-ésimo término?

   a) $n^2 + 1$ b) $n^2 - 2n + 1$ c) $n^2 + 2n + 1$ d) $n(n + 1)$

2. Al cortar una superficie de revolución con un corte perpendicular al eje de rotación, ¿qué figuras se forman?

   a) circunferencias b) la generatriz c) rectas d) puntos

3. La pendiente de una recta se define como:

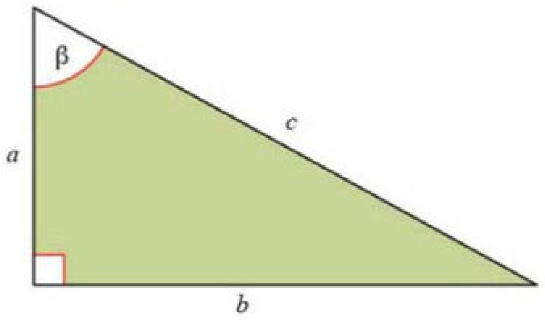
   a) El coseno de su ángulo de inclinación

   b) La tangente de su ángulo de inclinación

   c) El seno de su ángulo de inclinación

   d) Su ángulo de inclinación

4. Analiza la siguiente figura. ¿Cuáles son los valores del seno, el coseno y la tangente para el ángulo β?



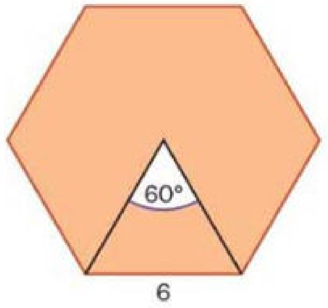
   a) $sen\beta = \frac{a}{c},\ cos\beta = \frac{b}{c},\ tan\beta = \frac{b}{a}$

   b) $sen\beta = \frac{b}{c},\ cos\beta = \frac{c}{c},\ tan\beta = \frac{b}{a}$

   c) $sen\beta = \frac{b}{c},\ cos\beta = \frac{a}{c},\ tan\beta = \frac{a}{b}$

   d) $sen\beta = \frac{b}{c},\ cos\beta = \frac{c}{a},\ tan\beta = \frac{b}{a}$

5. Haciendo uso de las razones trigonométricas, calcula el área del siguiente triángulo:



   a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

   b) $8\sqrt{3}$

   c) $6\sqrt{3}$

   d) $9\sqrt{3}$

EVALUAR PARA APRENDER

Completa la siguiente tabla, para ello reflexiona sobre cada indicador de aprendizaje del bloque.

Aspectos a evaluar	¿Qué hice para lograrlo?	¿A qué dificultades me enfrenté?
Utilizo *expresiones cuadráticas* para determinar el *n*-ésimo término de una sucesión.		
Identifico las *superficies* que se obtienen al girar una figura plana sobre un eje.		
Identifico, de entre una serie de figuras, cuál de ellas genera un cono recto, una esfera y un cilindro.		
En un triángulo rectángulo, identifico las razones seno, coseno y tangente.		
Utilizo las razones trigonométricas para resolver problemas.		
Distingo entre la desviación media y el rango como medidas de dispersión.		

Valora tus actitudes para el trabajo en equipo. Responde en tu cuaderno.

a) ¿Cómo fue mi participación durante las actividades colaborativas?

b) ¿Qué actitudes y valores puse en práctica al emitir opiniones y escuchar las de mis compañeros?

c) Solicita a tu docente que escriba algunas sugerencias para ayudarte a lograr los aprendizajes esperados y a mejorar tus actitudes en el trabajo en equipo, así como tu tolerancia e inclusión de tus compañeros en las actividades escolares.

d) Solicita a uno de tus padres o a tu tutor que lea tu autoevaluación y los comentarios de tu docente. Pide que te escriba algunas recomendaciones para mejorar tu proceso de aprendizaje. Asimismo, si es necesario, que escriba algún comentario para tu docente.

B5

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

EJES	TEMAS
Sentido numérico y pensamiento algebraico	**Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.
Forma, espacio y medida	**Medida** • Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. • Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. • Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.
Manejo de la información	**Proporcionalidad y funciones** • Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. **Nociones de probabilidad** • Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Puente Mackinaw en Michigan, Estados Unidos de América.

Una aplicación importante del estudio de las curvas denominadas *cónicas* se da en la construcción de puentes y otras estructuras. Por ejemplo, en un puente colgante como el de la imagen, los cables de suspensión colgados entre los dos postes deben sostener toda la estructura, que es mucho más pesada que el mismo cable. Nota que la forma del puente tiene que ver con su funcionalidad, es decir, el puente debe sostener un peso uniforme a lo largo de él (o en cualquier punto sobre él), de manera que en todo lugar el puente sea estable.

¿Sabes cómo se llama la curva que forma el cable que sostiene al puente?

¿QUÉ TANTO SABES?

Esta sección está diseñada para que reconozcas lo que has aprendido en tus cursos anteriores de matemáticas, y que ahora utilizarás para comprender los temas de este bloque.

1. Determina cuál es el sistema de ecuaciones que representa el siguiente problema.

   Un muchacho y una muchacha llevan costales de alimento en sus espaldas y la muchacha se va quejando: "No es posible, si yo soy menos fuerte que tú, ¿por qué tengo que cargar?". El muchacho, cansado de las quejas de la muchacha, le dice: "¿De qué te quejas? Si yo llevara un saco más que tú, llevaría el doble de la carga que llevas, y si tú llevaras un saco más que yo, entonces llevaríamos la misma carga".

   a) $2x + x = x + \frac{x}{2}$, $2x - 1 = 2$ b) $2x = y$, $x = \frac{y}{2}$

   c) $x + 1 = 2y$, $x = y + 1$ d) $x + y = 2y$, $x + 1 = \frac{x}{2}$

2. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ -5x - 2y = -80 \end{cases}$

   a) $x = 5$, $y = 10$ b) $x = -10$, $y = 20$ c) $x = 20$, $y = -10$ d) $x = -5$, $y = 10$

3. Usando la fórmula general, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

   a) $x^2 - 2x - 35 = 0$ ________________

   b) $6x^2 - 6x - 12 = 0$ ________________

   c) $3x^2 + 18x + 15 = 0$ ________________

   d) $3x^2 - 12x - 15 = 0$ ________________

4. Calcula el volumen de las siguientes figuras.

a)

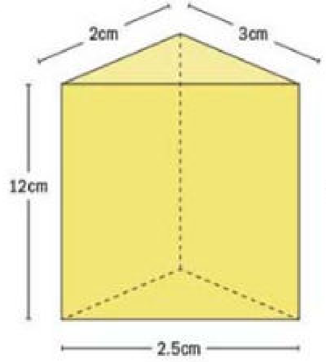


Figura 5.1

b)

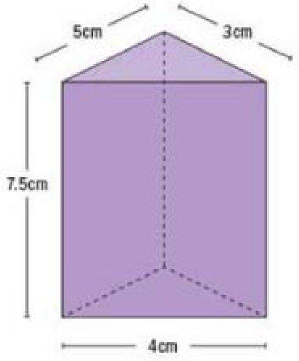


Figura 5.2

5. Resuelve los siguientes problemas.

   a) La base de un prisma rectangular es un rectángulo que mide 5 cm de largo y 2.5 cm de ancho; si el volumen del prisma es de 37.5 cm³, ¿cuál es la altura del prisma?

   b) La base de un prisma rectangular es un triángulo rectángulo cuyas medidas de sus lados más cortos son 3 cm y 4 cm; si el volumen del prisma es de 18 cm³, ¿cuál es la altura del prisma?

   c) Un prisma tiene como base un pentágono regular cuyos lados miden 5 cm, y la altura del prisma es de 6 cm. Si el volumen del prisma es de 225 cm³, ¿cuánto mide el apotema del pentágono?

6. Escribe en el espacio indicado el inciso que corresponde a la gráfica que representa el enunciado.

a)

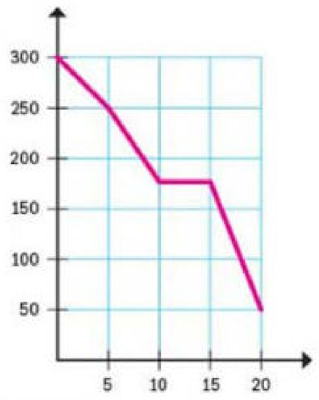


Figura 5.3

b)

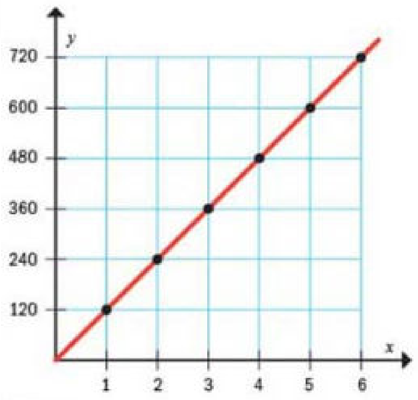


Figura 5.4

El vaciado de un recipiente ☐ La rapidez constante de un vehículo ☐

Compara tus procedimientos y respuestas de todos los ejercicios con los de tus compañeros y corríjanlos si es necesario.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones

Introducción

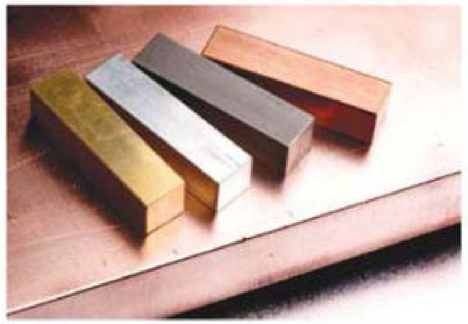


Figura 5.5 Aleaciones metálicas.

Las aleaciones metálicas se producen al mezclar dos o más elementos (figura 5.5). Las propiedades físicas y químicas de las aleaciones son similares a las de los elementos que las componen, pero en aleaciones férreas algunas propiedades, como la *dureza* y la *resistencia al corte*, pueden variar. Al elemento más abundante en la aleación se le llama *elemento base*.

Las aleaciones tienen un amplio uso en varios campos, que van desde la industria de la construcción hasta las aplicaciones médicas. Los vestigios más antiguos de las aleaciones datan de alrededor de 4000 años a.n.e. Las aleaciones metálicas más conocidas se muestran en la tabla 1:

Tabla 1 Aleaciones metálicas

Aleación	Componentes	Elemento base
Acero	Hierro y carbono	Hierro
Bronce	Cobre y estaño	Cobre
Oro blanco	Oro y plata o paladio o níquel	Oro
Latón	Cobre y zinc	Cobre
Alpaca	Cobre, zinc y níquel	Cobre
Peltre	Estaño, antimonio, cobre y plomo	Estaño
Cerámica	Varios	Varios

Siguiendo las indicaciones de su docente, organicen una lluvia de ideas que les permita responder las siguientes preguntas.

- ¿Cómo sabemos los porcentajes de cada elemento que se usan en las aleaciones?
- ¿Cómo podemos determinar las cantidades a usar en una aleación si conocemos el costo?
- ¿Qué conocimientos de química y física necesitas para comprender las propiedades de las aleaciones? Haz una lista en tu cuaderno.

En parejas, investiguen al menos cinco aplicaciones específicas de las aleaciones metálicas y preparen una presentación para exponer ante el grupo.

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. En la figura 5.6 están representados dos pentágonos regulares. Responda las preguntas relacionadas con la figura.

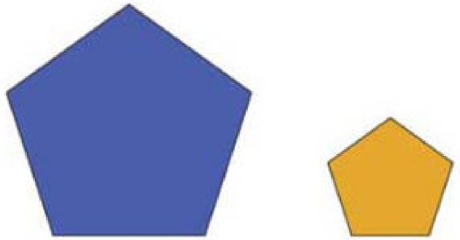


Figura 5.6

a) Si los lados del pentágono menor miden 6 cm y la razón de semejanza es de 5/2, ¿cuánto miden los lados del mayor? Expliquen cómo lo calcularon.

b) Si los lados del pentágono mayor miden 10 cm y la razón de semejanza es de 3/4, ¿cuánto miden los lados del menor? Expliquen cómo lo calcularon.

c) ¿Cuál es la razón entre los perímetros de ambas figuras? Expliquen cómo lo calcularon.

d) Planteen una expresión algebraica en la que se relacionen las medidas de los lados de pentágonos semejantes, sus perímetros y la razón de semejanza. Escriban su procedimiento.

e) ¿De qué grado es la expresión que planteaste? ____________

2. En la 5.7 figura se identifican dos rectángulos semejantes.

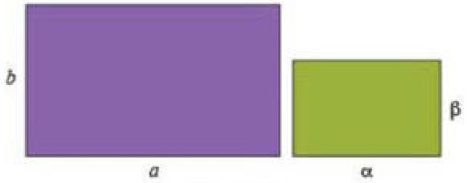


Figura 5.7

a) Expresa los perímetros por medio de una ecuación.

b) Si la razón de semejanza la denotamos por p, expresa los lados del rectángulo mayor en función de los lados del rectángulo menor.

c) ¿Cuál de la siguientes expresiones nos da el perímetro del rectángulo mayor en función de los lados del rectángulo menor?

$p\,(\beta + \alpha)$ $\quad$ $2p\,(\beta + \alpha)$ $\quad$ $2\,(\beta + \alpha)$ $\quad$ $p\,(2\beta + \alpha)$

d) ¿Qué relación tienen los perímetros de los rectángulos?

3. Completa la siguiente tabla para construir rectángulos semejantes.

a	b	α	β	p	Perímetro del rectángulo menor	Perímetro del rectángulo mayor
10	4			$\frac{1}{2}$		
		6	3	$\frac{4}{3}$		
		7		$\frac{5}{2}$	20	
	12			$\frac{3}{4}$		50

4. En la figura 5.8 se ve un triángulo isósceles cuya altura mide 7 cm menos que el lado desigual, y el área del triángulo es de 288 cm².

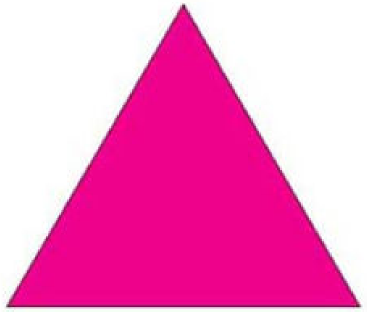


Figura 5.8

a) Si denotamos por x la medida del lado desigual, escribe una expresión para la altura del triángulo.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas resulta de sustituir, en la fórmula del área de un triángulo, las expresiones para la base y la altura?

$$\frac{(x-7)}{2} = 288 \qquad \frac{(x)(x)-7)}{2} = 288$$

$$x(x-7) = 288 \qquad \frac{x(x-7)}{2} = 288$$

c) ¿Cuánto miden la altura y el lado desigual?

5. En la figura 5.9 se muestran dos figuras: un rectángulo tal que la suma de sus lados es 13 cm y su área es de 36 cm²; un cuadrado cuyos lados se obtienen al multiplicar los lados del rectángulo por números a y b, la suma de sus lados es 12 cm y su área también es de 36 cm².

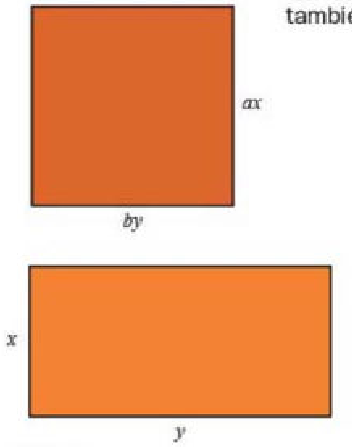


Figura 5.9

a) Escribe las expresiones algebraicas para los perímetros y las áreas de ambas figuras.

b) ¿Cuáles son las medidas del rectángulo?

c) ¿Cuáles son las medidas del cuadrado?

d) ¿Qué números deben ser los factores a y b?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Para cada uno de los siguientes incisos escribe un problema cuya solución sea la ecuación o sistema de ecuaciones dado.

a) $2x + 3y = 36$	
b) $3x - 4y - 8 = 0$ $5x - 2y - 12 = 0$	
c) $x^2 - 12x + 36 = 0$	
d) $x + y = 47$ $xy = 522$	

2. En la siguiente lista aparecen distintas ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Explica si es posible encontrar soluciones reales y por qué.

a) $x + 2y + 4 = 0$ $3x - 6y - 5 = 0$	
b) $x^2 + 3x + 4 = 0$	
c) $3x + 2y = 0$ $xy = 4$	
d) $y^2 - x^2 = 0$	
e) $x^2 + y^2 = 0$	

Comparen sus planteamientos y respuestas con las de sus compañeros y analicen en qué difieren.

Para que un transbordador espacial (figura 5.10) logre despegar, la velocidad que debe alcanzar a fin de vencer la fuerza de gravedad que la Tierra ejerce sobre él se llama *velocidad de escape*, y depende de la masa y el radio del planeta. Si pudiéramos viajar a cualquier planeta, la velocidad de escape dependería de la masa y el radio del mismo. La fórmula para calcular la velocidad de escape es:

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

donde M representa la masa del astro, R el radio del mismo y G representa la constante de *gravitación universal* cuyo valor tomaremos como:

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{(kg)^2}$$

Si pudiéramos viajar a cualquier planeta, la velocidad de escape dependería de la masa y el radio del mismo.

Figura 5.10 Transbordador espacial en una plataforma de lanzamiento.

Aplícalo

Completa la siguiente tabla para conocer las velocidades de escape en la Tierra, la Luna y algunos planetas del sistema solar.

Astro	Masa (M)	Radio (R)	Fórmula	Velocidad de escape
Tierra	5.9722×10^{24} kg	6.371×10^6 m	$\frac{2(6.672 \times 10^{-11})(5.9722 \times 10^{24})}{6.371 \times 10^6}$	
Luna	7.349×10^{22}	1.738×10^6		
Júpiter	1.898×10^{27}			$60\,189.17 \frac{m}{s}$
Venus		6.052×10^6		$10344.2027 \frac{m}{s}$
Marte			$\frac{2(6.672 \times 10^{-11})(6.39 \times 10^{23})}{3.396 \times 10^6}$	

Construye tu conocimiento

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. Se fabrican 5 kg de una aleación con dos elementos (véase la introducción, página 218). Completen la siguiente tabla y lleven a cabo las actividades que se indican.

Elemento base (kg)	Elemento de aleación (kg)	Operaciones
4.950 kg		
	2.25 kg	
4.15 kg		
		$5 - 3.05 = 1.95$
		$5 - 0.80 = 4.20$

a) Representen con una literal los elementos base y el de aleación.

b) Utilizando la representación anterior, escriban una expresión algebraica que represente las operaciones que hicieron para encontrar el elemento base.

c) Utilizando la representación anterior, escriban una expresión algebraica que represente las operaciones que hicieron para encontrar el elemento de aleación.

d) ¿De qué grado es la ecuación que encontraron en ambos casos? Expliquen cómo llegaron a su conclusión.

2. El precio del cobre es de $7 por kilogramo, y el del estaño es de $19 por kilogramo. Se usan las letras x y y para representar las cantidades de cobre y estaño respectivamente. Se requieren 46 kg de bronce, pero sólo se cuenta con $430, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones representa esta situación? Expliquen su elección y escriban los procedimientos para llegar a ella.

a) $x - y = 46$, $7x + 19y = 430$

b) $x + y = 430$, $7x + 19y = 46$

c) $x + 19y = 46$, $7x + y = 430$

d) $x + y = 46$, $7x + 19y = 430$

a) ¿Qué cantidades de cada elemento se deben usar? Escriban su procedimiento.

b) Anoten la cantidad que se pagó por cada elemento. Escriban su procedimiento.

3. Se hace un experimento en el que se fabrican 61 kg de una aleación con dos elementos, en la que el producto de los pesos de cada uno sea 900. Respondan las siguientes preguntas, considerando que representamos por x y y los pesos de cada uno de estos elementos.

a) Escriban un sistema de ecuaciones que represente los hechos planteados.

b) ¿Cuáles son las cantidades de cada elemento que se usan en la aleación? Escriban sus procedimientos y resultados.

c) ¿De qué grado es la ecuación que resuelve el problema? Expliquen cómo obtuvieron su conclusión.

Cierre

Las fórmulas para resolver ecuaciones de primer y segundo grado son:

- Para la ecuación de primer grado de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde $a \neq 0$: $x = -\frac{b}{a}$

- Para la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones se encuentran mediante la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a \neq 0$

Para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado se tienen diversos métodos: suma y resta, regla de Cramer, igualación y sustitución.

Taller de matemáticas

Resuelvan los siguientes problemas en equipos de tres integrantes.

1. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 6 y 3 unidades menos que la hipotenusa, respectivamente. Calculen el área del triángulo.

2. El rendimiento anual de dos inversiones asciende a \$4 640. Una inversión produce el 8% de interés y la otra el 7.5%, ¿cuánto dinero se invirtió con cada tasa de interés si la cantidad inicial era de \$60 000?

3. En temporada vacacional, una línea aérea aplica los siguientes descuentos: estudiantes, 35%; profesores, 24%; personas mayores de 60 años, 10%. Cinco personas pagan un total de \$22 400; si dos son estudiantes, dos profesores y una persona mayor de 60 años, ¿cuál es el precio del boleto que compraron?

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto

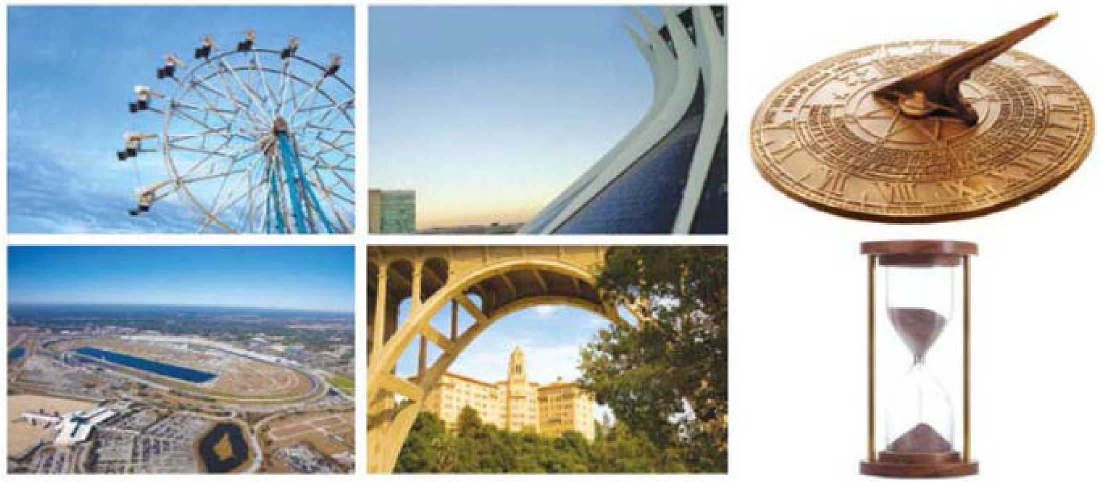
Introducción

¿Sabes que es una curva?, ¿qué tipos de curvas conoces? En esta lección estudiaremos algunas de las curvas más representativas en geometría: la *parábola*, la *elipse* y la *circunferencia*, y aprenderás a trazarlas.

En el *Diccionario de la Real Academia Española* se encuentra la siguiente definición:

Curva. f. *Geom*. La que no es recta en ninguna de sus porciones.

A partir de la definición de curva, traza y señala en las siguientes imágenes las curvas que encuentres; asígnales números para identificarlas.



Investiga cómo es la forma de una elipse, una parábola y una hipérbola y en la siguiente tabla escribe qué tipo de curva es la que señalaste en las imágenes.

Núm. de curva	Tipo de curva

Al finalizar compara tus anotaciones con las de otro compañero; verifiquen si hay diferencias en sus elecciones y si es necesario, con ayuda de su docente, corrijan.

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Usen su juego de geometría y en una cartulina, o en hojas de cuaderno, tracen el desarrollo plano de la figura 5.11, recórtenlo y ármenlo. Pero antes de armarlo respondan las preguntas en su cuaderno.
   a) ¿Cómo se llama el cuerpo geométrico que va a resultar luego de armar el desarrollo plano?
   b) ¿Qué figuras o productos tienen esa misma forma?
   c) Después de armado el cuerpo geométrico,
   - ¿Cuántos picos tendrá?
   - Sobre el desarrollo plano indiquen qué forma tendrá la base del cuerpo ya armado.

Al terminar de armar los cuerpos revisen si las respuestas que dieron fueron correctas, y en caso de que no lo sean, corríjanlas.

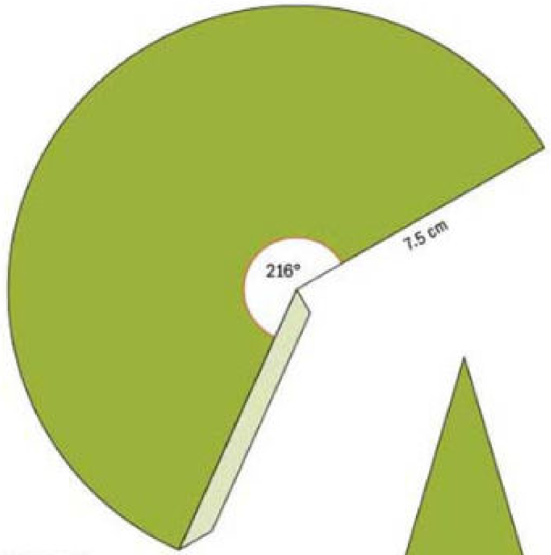


Figura 5.11

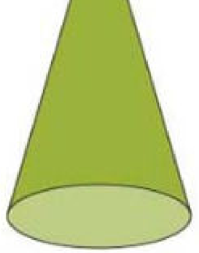
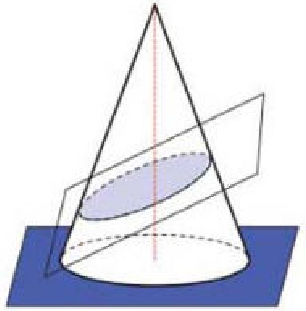


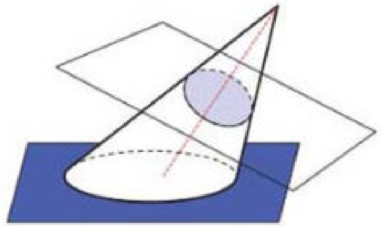
Figura 5.12

2. Rellenen el cuerpo geométrico con plastilina; deben hacer presión, pero cuidando de no alterar la forma del cuerpo (figura 5.12). Cuando hayan terminado saquen con cuidado la plastilina del cono, pero sin que pierda su forma. Con una espátula o una regla de metal realicen en uno de los conos los cortes que se indican a continuación.

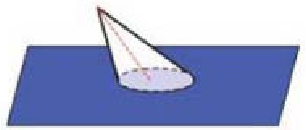
Procuren que los cortes en la plastilina se hagan de manera que no se deforme el cono recto.



Coloquen sobre una hoja el cono que les quedó y con un lápiz dibujen el contorno de la base.



Realicen lo mismo que en el paso anterior, recuerden que los cortes no deben deformar la figura.



   a) ¿Cuál es el nombre de la figura que quedó trazada en el papel cuando se hizo el primer corte del cono?
   b) ¿Cuál es el nombre de la figura que quedó trazada en el papel cuando se hizo el segundo corte del cono?
   c) Expliquen en qué son parecidas las dos figuras trazadas en el papel.

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten la forma en que los obtuvieron, si no coinciden consulten con su profesor y si es necesario corrijan.

Luego de hacer un corte con una superficie plana sobre un cono recto, como los que se hicieron sobre los cuerpos de plastilina, si se dibuja la forma que resulta sobre la base del cono recto queda una curva llamada *elipse* (figura 5.13).

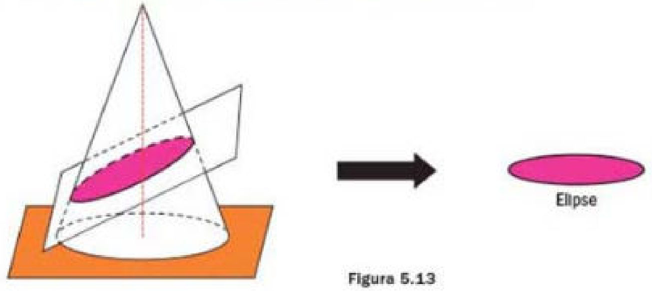


Figura 5.13

Aplícalo

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Dibujen en una hoja o sobre un pedazo de cartulina el desarrollo plano de la figura 5.14, ármenlo y rellénenlo con plastilina; recuerden no presionar demasiado para que el cono no se deforme.

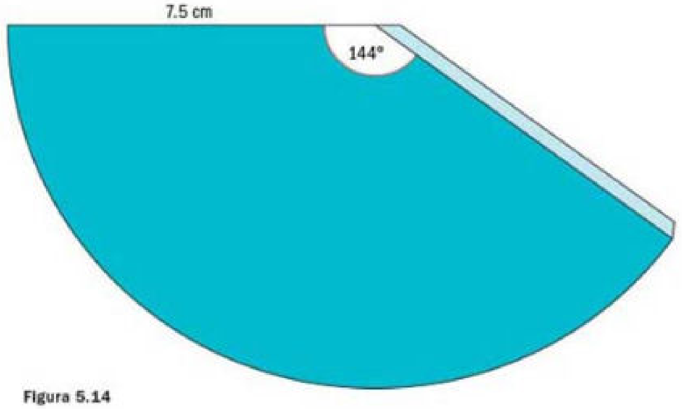
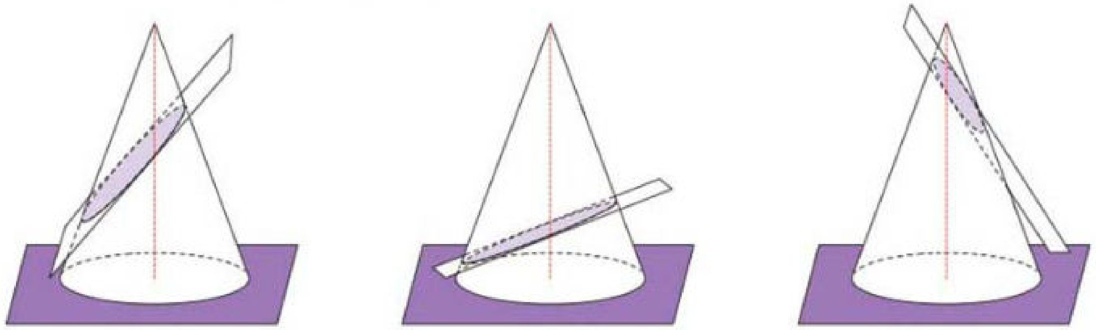


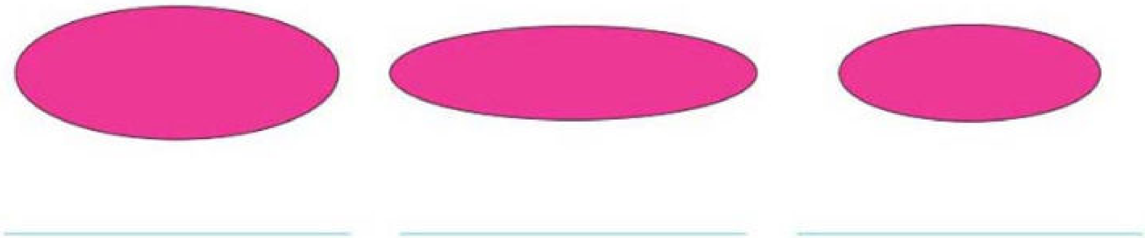
Figura 5.14

2. A partir de la figura 5.15, escriban en la pagina siguiente qué elipse correponde a cada uno de los cortes realizados. Expliquen en su cuaderno cómo eligieron la elipse que corresponde a cada corte.



Primer corte Segundo corte Tercer corte

Figura 5.15



3. Después, con el mismo cuidado, retiren la plastilina del cono y hagan los cortes como se ve en la figura 5.15. Verifiquen sus respuestas, si se equivocaron hagan las correcciones pertinentes.

Comparen sus resultados y con ayuda de su profesor indiquen las diferencias entre las elipses que resultaron de los cortes anteriores.

1. Vuevan a colocar la plastilina sobre el primero de los conos rectos hechos con cartulina, y con una espátula o un cúter realicen el corte que se indica en la figura 5.16.
   a) Coloquen la parte cortada del cono sobre una hoja, y con un lápiz tracen el contorno de la figura, como en la imagen.
   b) Repitan lo que hicieron en el inciso anterior para los cortes al cono recto mostrados en la figura 5.17.

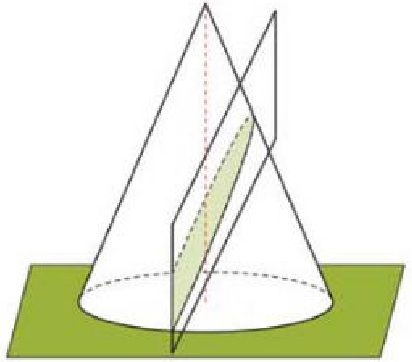


Figura 5.16

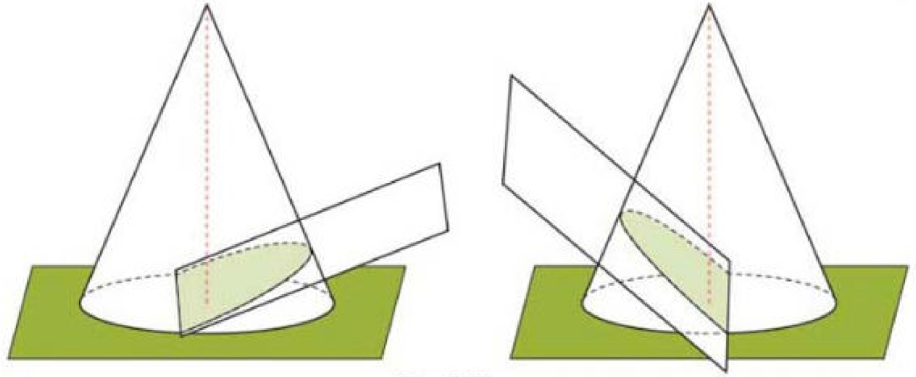


Figura 5.17

   c) Mencionen tres lugares o cosas cuya forma sea como la de las curvas que acaban de trazar.
   d) ¿Conocen el nombre de este tipo de curvas? Anótenlo.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Luego de cortar un cono recto con una superficie plana, como lo hicieron sobre los cuerpos de plastilina, si se dibuja la forma que queda sobre la base del cono recto resulta una curva llamada *parábola* (figura 5.18).

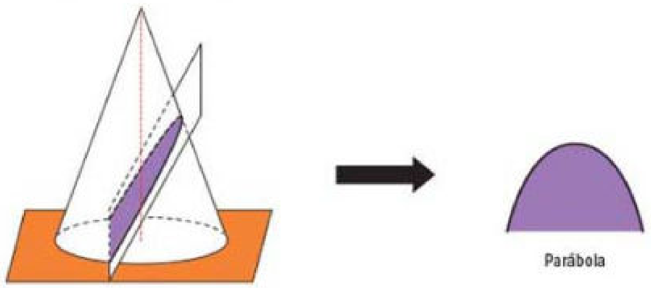


Figura 5.18

Construye tu conocimiento

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades para comprobar que sabes hacer cortes planos en conos y obtener parábolas.

1. En un pedazo de cartulina dibujen el desarrollo plano de la figura 5.19, y luego recórtenlo y ármenlo.
   a) Coloquen el cilindro armado sobre una mesa, como en en la figura 5.20.

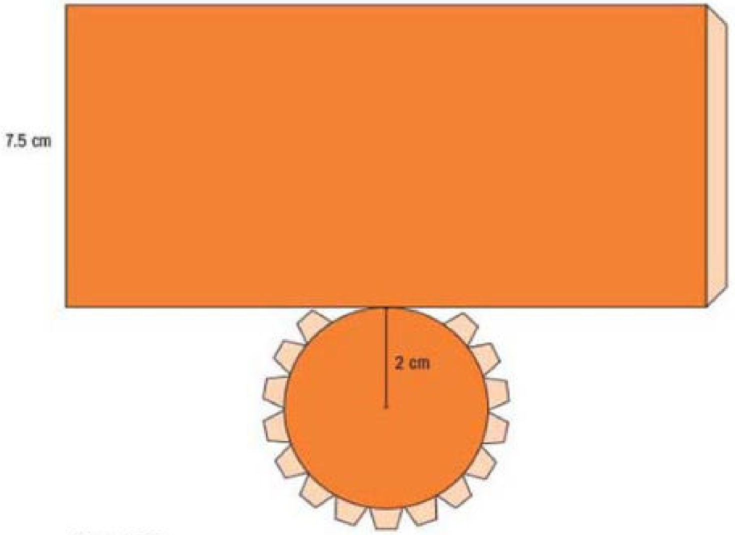


Figura 5.19

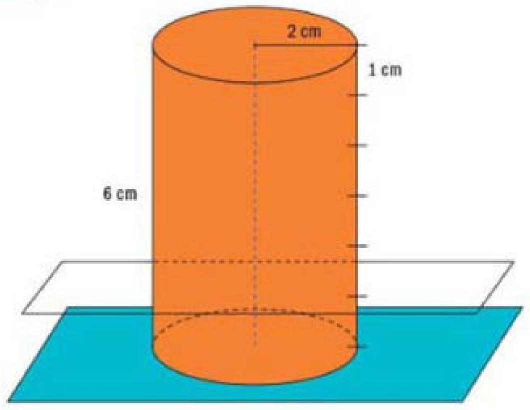
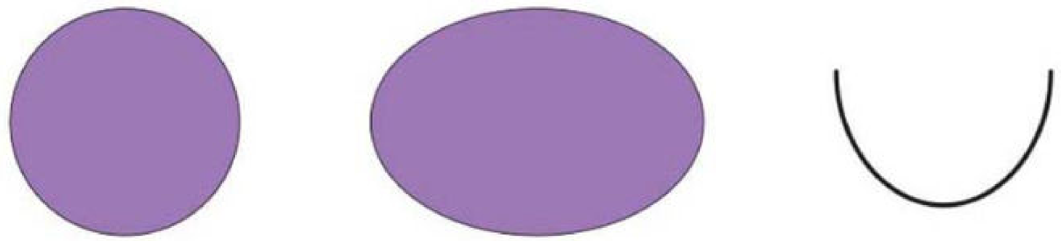


Figura 5.20

   b) Hagan un cilindro de plastilina usando el molde que armaron, y realicen los cortes necesarios para obtener las siguientes figuras.



   c) Hagan cortes paralelos a la mesa en el cilindro de plastilina a una altura de 2 cm y 5 cm respectivamente, y determinen el radio de la circunferencia que queda como cara.

   - Radio de la circunferencia (corte a 2 cm de altura): ____________
   - Radio de la circunferencia (corte a 5 cm de altura): ____________

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten las estrategias que utilizaron para obtenerlos.

2. Vuelvan a formar moldes de plastilina con los dos conos rectos que construyeron en las actividades anteriores y realicen los cortes como se indica a continuación.

Se hace un corte paralelo a la mesa en que se apoya el cono recto, aproximadamente a la mitad de su altura (figura 5.21 a).

Coloquen sobre una hoja de papel la base del cono que quedó y con un lápiz dibujen su contorno. Luego haz otro corte como el anterior, pero aproximadamente a la tercera parte de la altura (figura 5.21 b).

Coloquen sobre una hoja de papel la base del cono que resultó y con un lápiz dibujen su contorno (figura 5.21 c).

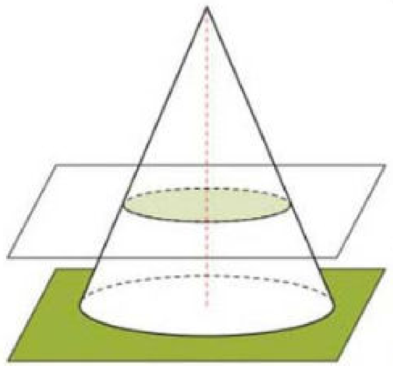


Figura 5.21 a

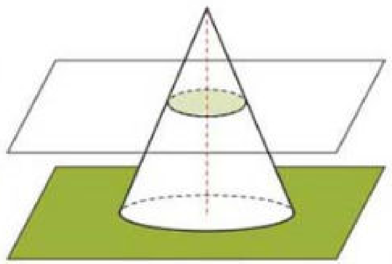


Figura 5.21 b

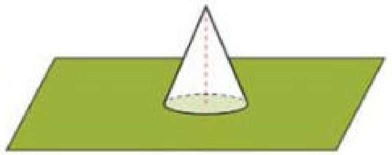


Figura 5.21 c

   a) ¿Qué figura quedó trazada en el papel cuando se hizo el primer corte del cono?

   ____

   b) ¿Qué figura quedó trazada en el papel cuando se hizo el segundo corte del cono?

   ____

c) Expliquen por qué al hacer cortes paralelos a la superficie plana donde se apoya un cono recto, la nueva base es también una circunferencia.

d) Completen la siguiente tabla con las medidas de los radios de las circunferencias que fueron quedando al hacer los cortes.

Cono recto	Radio de la circunferencia de la base del cono
Cono antes de realizar el primer corte	
Cono después de realizar el primer corte	
Cono después de realizar el segundo corte	

e) Para el segundo cono recto de plastilina realicen los siguientes cortes; después de cada corte hay que medir el radio de la circunferencia que queda como base del cono recto.

- Medida del radio del cono recto antes de realizar el primer corte.

  Radio: __________

- El primer corte deben hacerlo aproximadamente a la cuarta parte de la altura del cono, midan el radio de la circunferencia que queda como base al realizar el corte.

  Radio: __________

- Vuelvan a formar el cono recto usando el molde de cartulina y hagan un corte aproximadamente a la tercera parte de la altura del cono. Midan el radio de la circunferencia que queda como base después de haber realizado el corte:

  Radio: __________

- Vuelvan a formar el cono y hagan un corte aproximadamente a la mitad de la altura del cono. Midan el radio de la circunferencia que queda como base después de haber realizado el corte.

  Radio: __________

f) ¿Qué relación hay entre el radio del cono que queda al realizar un corte respecto al radio que tenía antes de hacerlo? Expliquen su respuesta.

Comparen sus resultados en grupo y, con ayuda de su profesor, escriban en su cuaderno un resumen de los conceptos utilizados en las actividades anteriores.

Aplícalo

Lleva a cabo las siguientes actividades.

1. En un pedazo de cartulina reproduce y arma los conos rectangulares a partir de los siguientes desarrollos planos (figura 5.22).

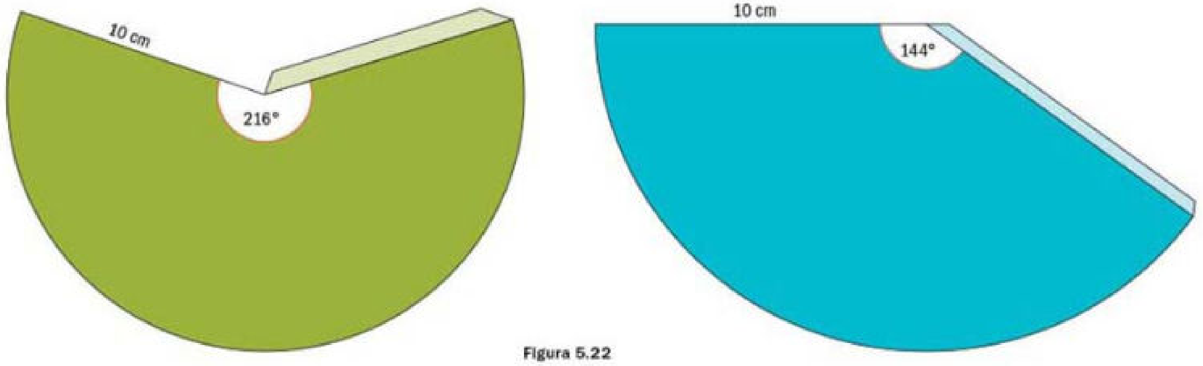


Figura 5.22

2. Como ya lo has hecho antes usando en forma de molde los conos del ejercicio anterior, construye dos conos sólidos con plastilina.

3. Coloca sobre una mesa el primero de los conos rectos y realiza cortes sobre el cono, como se muestra en la figura 5.23 a y b.

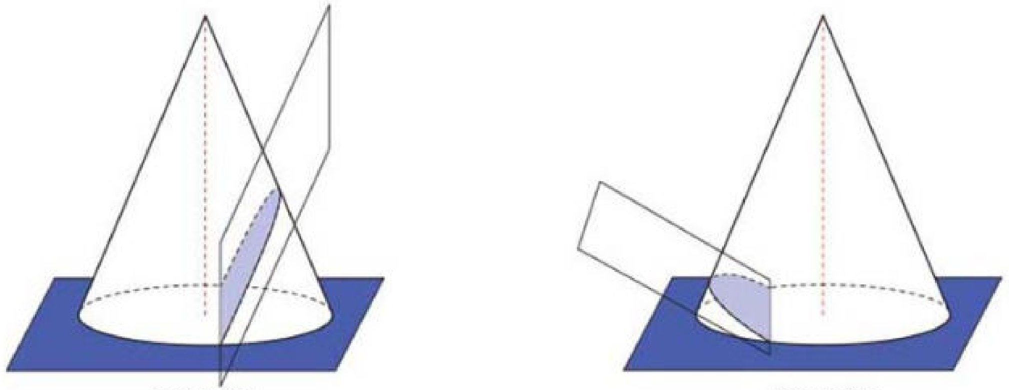


Figura 5.23 a Figura 5.23 b

a) Describe la curva que se generará sobre el contorno de los conos cortados.

b) Investiga el nombre de la curva. __________

Cierre

Al hacer cortes paralelos a una superficie plana en donde se coloca un cilindro, el trazo de la curva que se forma es una *circunferencia* (figura 5.24).

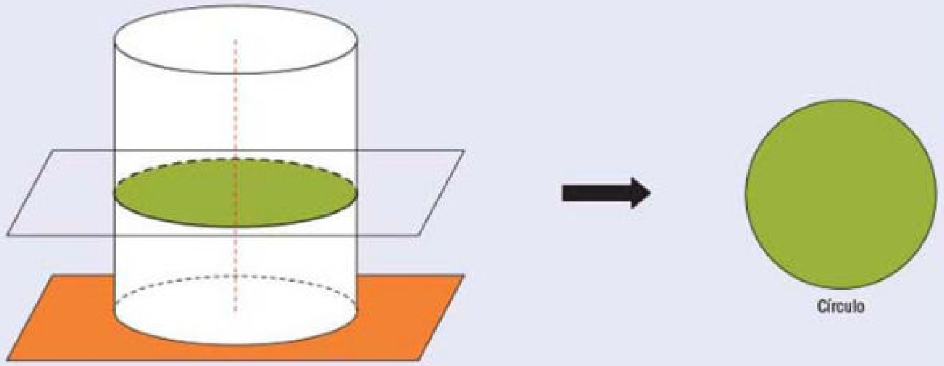


Figura 5.24

El radio de la circunferencia que queda al realizar un corte paralelo a la base donde se apoya un cilindro es el mismo que el radio del cilindro original.

Lo mismo sucede si en lugar de hacer los cortes a un cilindro se hacen a un cono recto (figura 5.25).

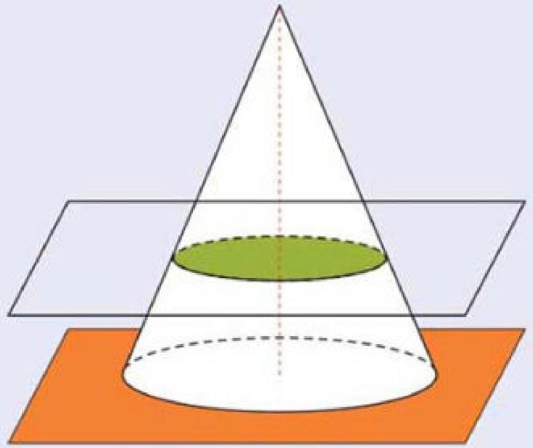


Figura 5.25

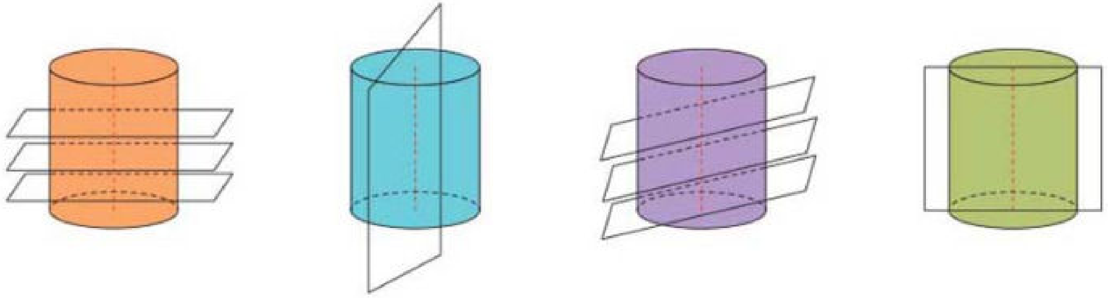
Los cortes rectos en el cilindro generan circunferencias con *radios proporcionales* a la altura del corte realizado; es decir, que si se hace un corte a la mitad de la altura del cono, el radio de la circunferencia que queda como base también es la mitad del radio de la circunferencia original.

Si el corte se hace a la tercera parte de la altura, el radio será la tercera parte del original, y así sucesivamente.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades. Al finalizar comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

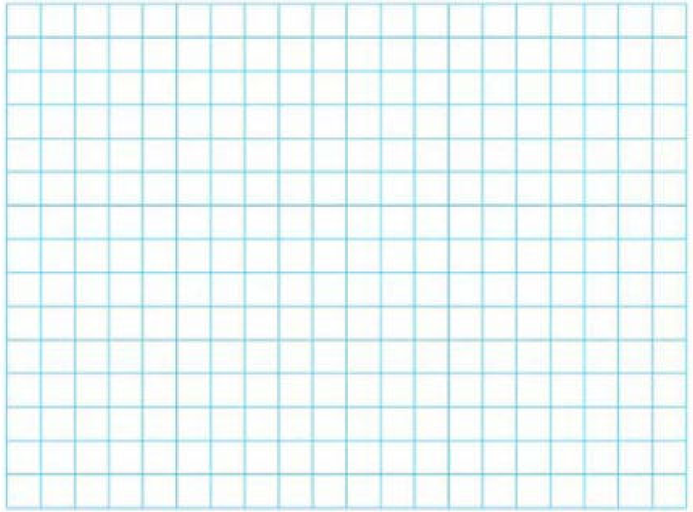
1. Anoten bajo el cilindro el nombre de la figura que se obtiene al hacer el corte que se indica en el dibujo, y trázala en tu cuaderno.



2. El cono de la figura 5.25 mide 12 cm de altura, y la circunferencia de la base mide 3 cm de radio. Si se hacen cortes paralelos a la base, como se ve en la figura, completen la tabla para establecer la medida del radio de la base en cada corte.

Altura del cono (cm)	12	10	8	6	5	4	3	2	1
Radio de la base (cm)	3	2.5							

Tracen la gráfica que representa la relación entre las diferentes alturas del cono que se obtiene al hacer cortes paralelos a su base, y el radio de los círculos que forman la base de cada cono recto (figura 5.26).



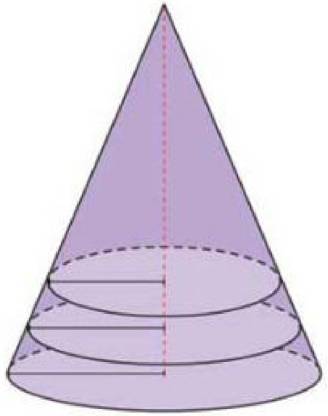


Figura 5.26

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos

Introducción

Cuando se habla de motores de automóviles, inevitablemente se usan frases como: "centímetros cúbicos", "caballos de fuerza", "cuatro, seis u ocho cilindros", etcétera; todas ellas, en el fondo, se refieren a la cantidad de gasolina que el motor requiere para funcionar.

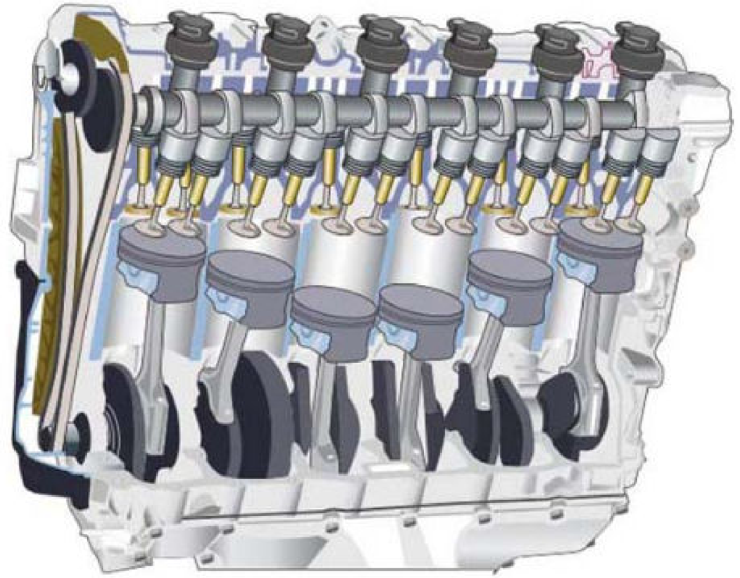


Figura 5.27 Motor de cuatro tiempos con seis cilindros.

Los cilindros de un motor automotriz son recipientes en los que se lleva a cabo la combustión interna necesaria para producir movimiento (figura 5.27); los *caballos de fuerza* se refieren a la potencia con la que el motor mueve el automóvil, y los *centímetros cúbicos* son la unidad de medida del volumen.

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Investiguen cuál es la relación que existe entre la cantidad de gasolina, el tamaño de los cilindros y la potencia que genera un motor automotriz.
2. Investiguen qué otras unidades de medida se utilizan para medir la potencia.
3. Investiguen quién **acuñó** el término "caballos de fuerza" para designar la potencia y cuál es su equivalente en el Sistema Inglés de unidades y en el Sistema Internacional de unidades.

Al finalizar, comenten en grupo los resultados de sus investigaciones y soliciten a su docente que verifique si son correctos o no y que les explique por qué.

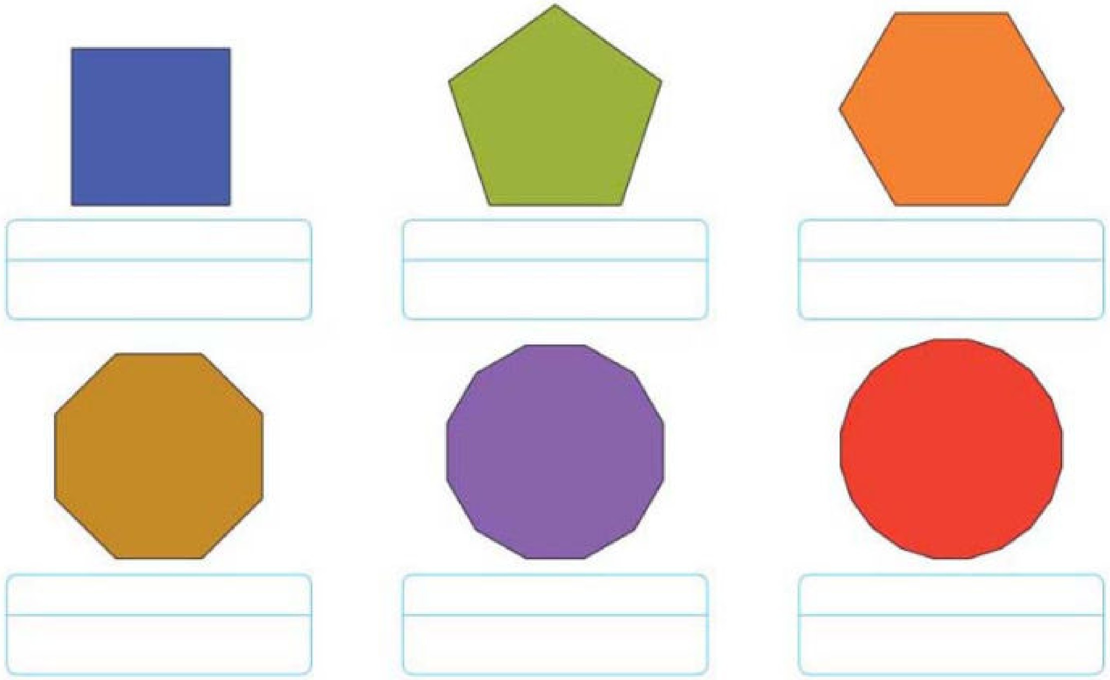
Glosario

Acuñar. *Dar forma a expresiones o conceptos de manera permanente.*

Construye tu conocimiento

En parejas, analicen la siguiente sucesión de polígonos y resuelvan los planteamientos.

1. Escriban abajo de cada figura el nombre del polígono y la fórmula para calcular su área.

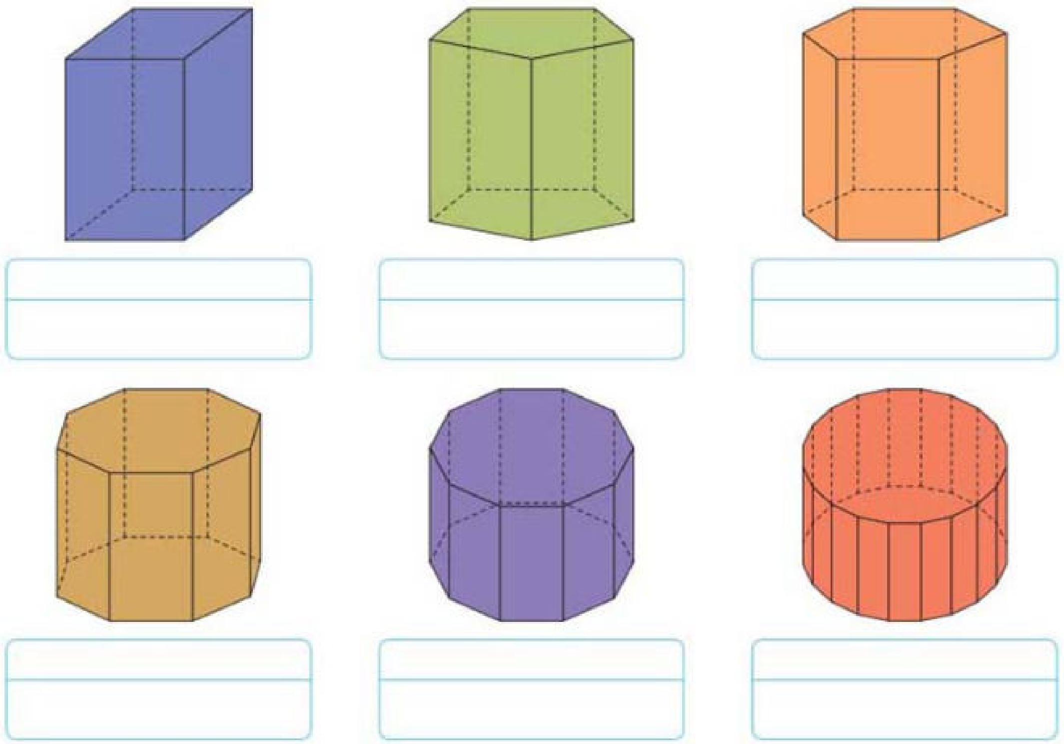


2. ¿Qué pasa con la longitud de los lados de los polígonos a medida que aumenta el número de lados?
3. ¿A qué figura se va pareciendo el polígono regular si cada vez aumentamos el número de lados? ¿Por qué?
4. Expliquen qué pasa con el área de los polígonos a medida que aumentamos el número de lados. ¿Por qué?
5. Tracen la mediatriz de dos lados consecutivos de cada figura para encontrar su centro. Con ayuda del compás tracen un círculo con el centro del polígono y que pase por sus vértices. ¿Qué ocurre con la diferencia de las áreas de ambas figuras?

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y con ayuda de su docente escriban las conclusiones generales en su cuaderno.

Las siguientes figuras son prismas regulares que tienen como base los polígonos de la actividad anterior.

1. Abajo de cada prisma anota su nombre y la fórmula para encontrar su volumen.



2. Si sobre las circunferencias trazadas en la actividad anterior se construyen unos cilindros en los que se puedan encerrar estos prismas, ¿cómo serán los volúmenes de los prismas respecto de los cilindros? Argumenta tu respuesta.

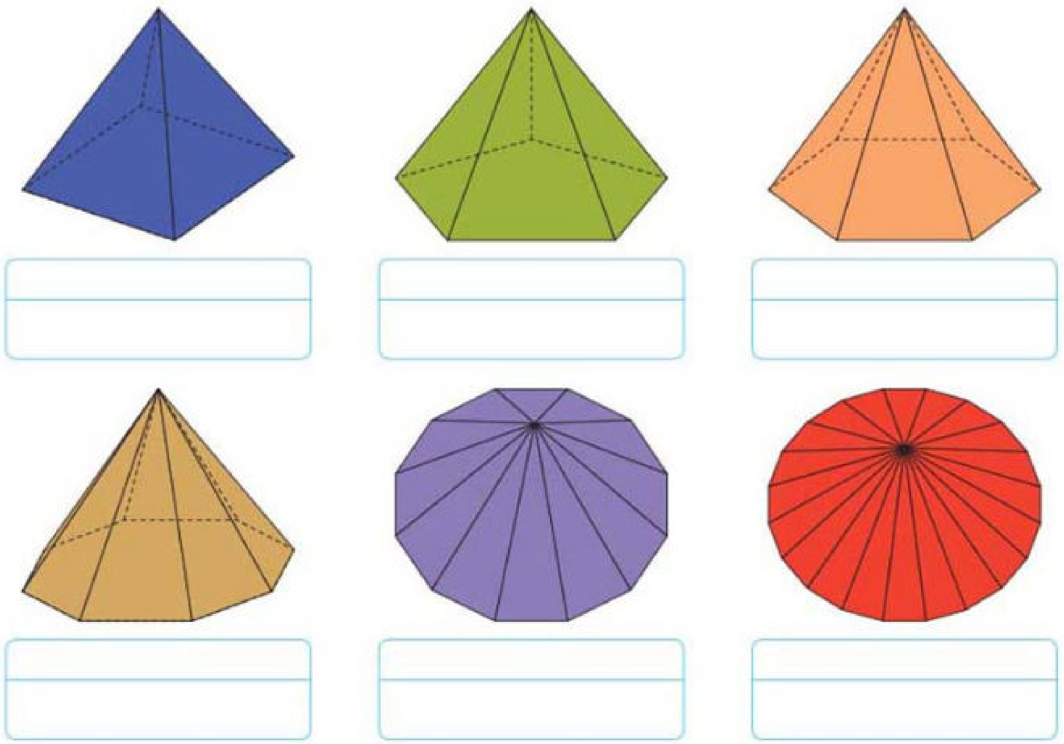
3. Si consideramos los prismas construidos sobre polígonos en los que se aumentaron los lados y los cilindros correspondientes, ¿cómo será la diferencia entre los volúmenes? Argumenta tu respuesta.

4. Explica qué pasa con los volúmenes de los prismas en los que se aumentaron los lados y los cilindros que los encierran. Argumenta tu respuesta.

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y con ayuda de su docente escriban conclusiones generales en su cuaderno.

Las siguientes pirámides se construyeron sobre los polígonos regulares de la primera actividad.

1. Abajo de cada pirámide anota su nombre y la fórmula para encontrar su volumen.



2. Si sobre las circunferencias trazadas en la primera actividad se construyen unos conos en los que se puedan encerrar los prismas anteriores, ¿cómo serán los volúmenes de las pirámides con respecto a los conos? Argumenta tu respuesta.

3. Si consideramos las pirámides construidas sobre polígonos en los que se aumentaron los lados y los conos correspondientes, ¿cómo será la diferencia entre los volúmenes? Argumenta tu respuesta.

4. Explica qué pasa con los volúmenes de las pirámides en los que se aumentaron los lados y los conos que los encierran. Argumenta tu respuesta.

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y con ayuda de su docente escriban conclusiones generales en su cuaderno.

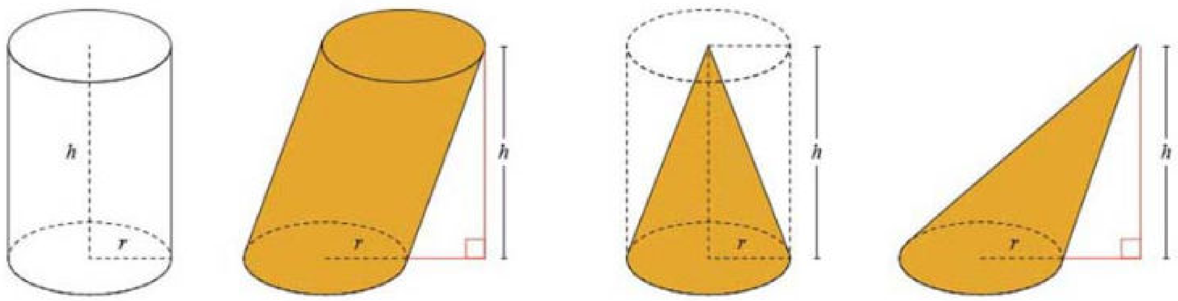
Principio de Cavalieri

Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas que se obtienen al realizar un corte a una misma altura y paralelamente a la base, poseen entonces igual volumen. Este principio se debe al italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647).

Aplícalo

En parejas, analicen las figuras y respondan las preguntas en su cuaderno.

1. En la siguiente figura se ven dos cilindros y dos conos con la misma base y altura.



a) Las figuras de la derecha, ¿son superficies de revolución? ¿Por qué?

b) ¿Cómo se obtienen las figuras de la derecha a partir de las figuras de la izquierda?

c) Si cortamos con una cuchilla ambos cilindros a la misma altura, de manera que la cuchilla se coloque paralela a la base, ¿qué figura tienen los cortes?

d) ¿Cómo son las áreas de las figuras que se obtienen de los cortes? ¿Por qué?

e) Si cortamos con una cuchilla ambos conos a la misma altura, de manera que la cuchilla se coloque paralela a la base, ¿qué figura tienen los cortes?

f) ¿Cómo son las áreas de las figuras que se obtienen de los cortes? ¿Por qué?

Cierre

La fórmula para obtener el *volumen de un cilindro* es:

$$V = A \times h$$

donde A es el área del círculo de la base y h es la altura del cilindro.

La fórmula para obtener el *volumen de un cono* es:

$$V = \frac{1}{3}(A \times h)$$

donde A es el área del círculo de la base y h es la altura del cono.

Taller de matemáticas

En parejas, analicen y resuelvan los siguientes planteamientos en su cuaderno.

1. ¿Cuál será el volumen de una lata de forma cilíndrica que tiene un diámetro de 10 cm y una altura de 15 cm?

2. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya base que tiene 32 cm de perímetro y 12 cm de altura? (Recuerda que el radio de un círculo se puede deducir a partir de su perímetro).

3. Considera un cilindro y un cono con la misma base, ¿cómo deben relacionarse las alturas para que ambos cuerpos tengan el mismo volumen?

4. Considera un cilindro y un cono con la misma altura, ¿cómo deben relacionarse las bases para que ambos cuerpos tengan el mismo volumen?

5. Se tiene un cono dentro de un cilindro, con la misma base y altura, ¿cuál es el volumen del cuerpo que queda entre el cono y el cilindro si el radio de la base mide 4 centímetros y tiene una altura de 15 centímetros?

En parejas, analicen las siguientes figuras 5.28 (a, b, c, d y e) y expliquen cómo pueden obtener el volumen de la esfera (figura 5.29).

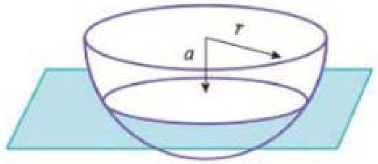


Figura 5.28 (a)

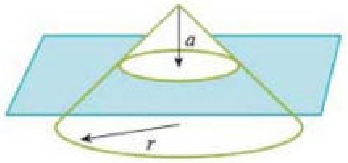


Figura 5.28 (b)

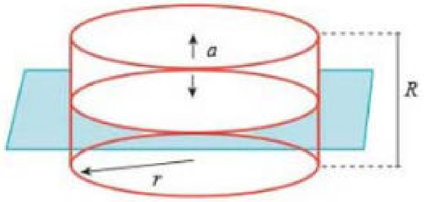


Figura 5.28 (c)

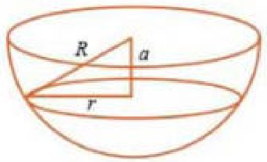


Figura 5.28 (d)

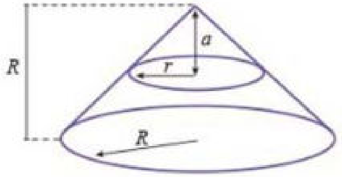


Figura 5.28 (e)

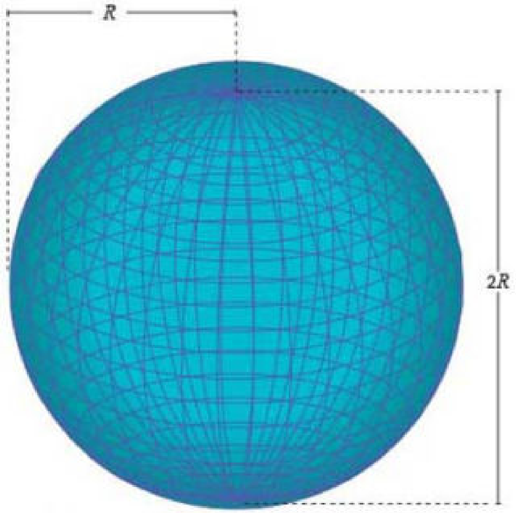


Figura 5.29

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos

Figura 5.30

Introducción

El almacenamiento de grandes volúmenes de **hidrocarburos** y de otras materias primas (figura 5.30) representa un gran reto para las empresas petroleras. Generalmente, la forma de los contenedores de líquidos es cilíndrica, ya que esta forma ayuda a distribuir la presión que generan los enormes volúmenes depositados en ellos.

Glosario

Hidrocarburo. *Compuesto resultante de la combinación del carbono con el hidrógeno.*

En parejas, lleven a cabo las actividades que se indican.

1. Comenten y respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué capacidad de almacenamiento tienen este tipo de contenedores?

   b) ¿Cómo se calcula su capacidad?

2. En la figura 5.30 se muestra un contenedor de capacidad industrial.
   a) Escriban la fórmula para calcular el volumen de un contenedor cilíndrico.

   b) ¿Cuál es el volumen del contenedor si el diámetro de la base mide 52 m y la altura mide 15 m?

   c) ¿Será posible construir un contenedor con capacidad de 25 000 m³ si únicamente conocemos este dato? Argumenten su respuesta.

   d) Pero si además de la capacidad conocemos el área de la base, ¿será posible construirlo? ¿Por qué?

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados. Soliciten a su docente que verifique si son correctos o no y que les explique por qué.

Construye tu conocimiento

Resuelvan los siguientes planteamientos en parejas.

Figura 5.31 Reloj de arena.

1. La figura 5.31 muestra un reloj de arena compuesto por dos conos.
   a) Escriban la fórmula para calcular el volumen de cada uno de los conos.

   b) Si la altura del reloj es de 50 cm y el perímetro de la base mide 28 cm, ¿cuál es su volumen? Expliquen cómo lo calcularon.

   c) Si se desea construir un reloj con un volumen de 10 000 cm³, ¿será necesario otro dato? ¿Por qué?

   d) Si además de conocer el volumen se sabe qué altura tendrá el reloj, ¿será posible construirlo? ¿Por qué?

2. En la siguiente tabla se muestran las variables involucradas en las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y el cono. Completen las tablas escribiendo, cuando sea posible, la expresión algebraica que determine el dato desconocido si los datos que conoces son los que corresponden al renglón y columna correspondientes.

Cilindro			
	Radio de la base (r)	Altura del cilindro (h)	Volumen (V)
Radio de la base (r)			
Altura del cilindro (h)	$V = \pi r^2 h$		
Volumen (V)			

Cono			
	Radio de la base (r)	Altura del cilindro (h)	Volumen (V)
Radio de la base (r)			
Altura del cilindro (h)			$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$
Volumen (V)			

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados. Soliciten a su docente que verifique si son correctos o no y que les explique por qué.


Figura 5.32 Jeringas de diversos diámetros.

En medicina, uno de los artefactos más útiles es la jeringa (figura 5.32), que es un cilindro que contiene una sustancia, la cual, al ser empujada por un émbolo, pasa a través de una aguja y se introduce en el organismo.

Aplícalo

Resuelvan los siguientes planteamientos en parejas.

1. En la tabla de abajo se muestran jeringas de diferentes dimensiones. Complétenla para encontrar la medida desconocida.

Diámetro o perímetro de la base	Altura	Volumen
Perímetro: 4 cm	9 cm	
Diámetro:	12 cm	50 cm³
Diámetro: 1.8 cm		30 cm³
Perímetro: 3.5 cm	10 cm	
Perímetro:	12 cm	10 cm³
Diámetro: 2.6 cm		60 cm³

2. Los altavoces son aparatos con un mecanismo simple, pero con un sorprendente objetivo: generar ondas sonoras a través del movimiento de un cono.

a) En la siguiente tabla se muestran algunos conos de varias dimensiones. Completen la tabla para encontrar la medida desconocida.

Diámetro o perímetro de la base	Altura	Volumen
Diámetro: 30 cm	10 cm	
Perímetro: 62 cm		2000 cm³
Diámetro:	5.5 cm	3500 cm³
Perímetro:	8 cm	3000 cm³
Diámetro: 15 cm		620 cm³
Perímetro: 94 cm	10.5 cm	

3. Un silo es un recipiente de gran capacidad comúnmente usado en la industria agrícola para almacenar granos, cereales, etcétera. En la figura 5.33 se muestra una serie de silos que están construidos con un cilindro y un cono.


Figura 5.33 Silos para almacenaje de productos agrícolas.

a) ¿Qué capacidad de almacenamiento tendrá un silo de estas características, si su radio mide 1.5 m, la parte cilíndrica tiene una altura de 10 m y la parte cónica tiene una altura de 2 m? Escriban sus procedimientos.

b) Se necesitan construir varios silos como los que se muestran en la figura 5.33, cuya capacidad sea de 85 m³ cada uno, con un radio de 2 m. La parte cilíndrica debe tener una altura de 5 m, ¿cuál será entonces la altura de la parte cónica? Escriban sus procedimientos.

c) Un silo tiene una altura total de 15 m y un radio de 3 m. Si la altura de la parte cilíndrica es $\frac{4}{5}$ del total:

- ¿Cuánto miden las alturas respectivas? Escriban sus procedimientos.

- ¿Cuál es la capacidad total del silo? Escriban sus procedimientos.

d) Un silo tiene una altura total de 12 m y una capacidad de 180 m^3:

- ¿Cuánto mide su radio? Escriban sus procedimientos.

- Si la altura de la parte cónica es $\frac{1}{4}$ del total, ¿cuáles son las alturas de cada parte? Escriban sus procedimientos.

- ¿Cuál es la capacidad de cada parte? Escriban sus procedimientos.

4. Investiguen los usos y las aplicaciones de los recipientes cilíndricos y cónicos en los lugares que se mencionan y completen la siguiente tabla.

En la escuela	En la casa	En las oficinas	En la industria

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados. Soliciten a su docente que verifique si son correctos o no y que les explique por qué.

Cierre

Dados dos de los datos involucrados en la fórmula del volumen, podemos encontrar el tercero utilizando los *inversos multiplicativos* de los datos correspondientes.

Taller de matemáticas

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades en su cuaderno.

El tamaño de los motores de los automóviles se mide en centímetros cúbicos (cc) y se refiere al volumen de los cilindros que lo constituyen. En la figura 5.34 se muestra el proceso de combustión.

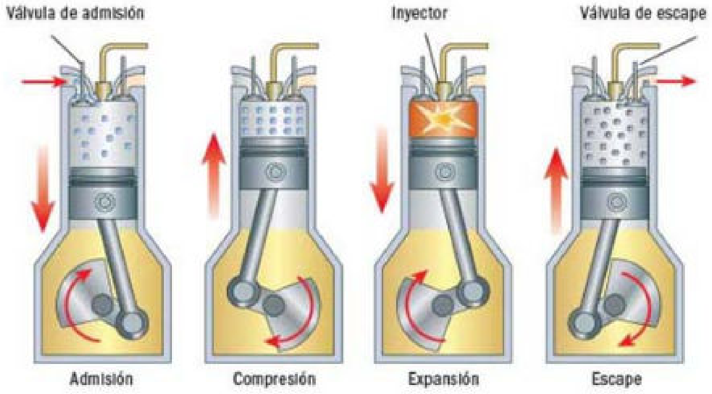


Figura 5.34 Proceso de combustión en un motor de cuatro tiempos.

1. Si un motor de 4 cilindros tiene una capacidad de 2000 cc, ¿cuál es el volumen de cada cilindro?
2. Un motor tiene 6 cilindros con las siguientes dimensiones: altura, 12 cm; diámetro, 8 cm, ¿cuál es el tamaño del motor?
3. Se cuenta con un motor de 4 cilindros de 1600 cc; si el diámetro de los cilindros es de 6 cm, ¿cuál es su altura? Copien y completen en su cuaderno la tabla de la derecha para encontrar el tamaño total de un motor o la cantidad de cilindros, o el volumen de ellos.

Número de cilindros	Diámetro	Altura	cc totales
4	6 cm	10 cm	
4	8 cm		1 500
	7.5 cm	11.3 cm	2 000
6		7 cm	3 600
8	8 cm	10 cm	

4. Escriban la expresión algebraica para encontrar el tamaño total de un motor si se conoce la cantidad de cilindros y su volumen.
5. La relación entre el tamaño de un motor y la potencia que desarrolla depende de algunos factores extra, pero aproximadamente se da como sigue: 1 caballo de fuerza (hp) equivale a 15-17 cc. Dados los siguientes datos, copien y completen la tabla de la derecha.

Tamaño del motor (cc)	Potencia (hp)	Factor
3 500	240	
1 400		16
	400	15

Con base en los datos que se dan, copien y completen la tabla de abajo.

Tamaño del motor				Caballos de fuerza	Factor
Núm. de cilindros	Diámetro	Altura	Total		
	6 cm	8 cm	905 cc		16
6	11 cm			400	15
	7.5 cm	11.3 cm	4000 cc		17
12		12 cm		350	16

Análisis de situaciones problemáticas de diversas disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Introducción

Figura 5.35 John von Neumann.

Se dice que al matemático húngaro John von Neumann (1903-1957), tal vez el más grande matemático del mundo cuando murió en 1957 (figura 5.35), una vez se le planteó el siguiente problema:

"Dos muchachos en bicicleta, a 20 km de distancia entre sí, empiezan a andar para reunirse. En el momento en que parten, una mosca que está en el volante de una de las bicicletas empieza a volar directamente hacia el otro ciclista. En cuanto llega al otro volante, da la vuelta y vuela de regreso al primero. La mosca voló ida y vuelta de volante a volante hasta que las dos bicicletas se reunieron.

Si cada bicicleta marchó a una velocidad constante de 10 km por hora, y la mosca voló a una velocidad constante de 15 km por hora, ¿qué distancia voló la mosca?".

a) ¿Cuál es la solución del problema anterior? Explica cómo llegaste a ella.

b) ¿Puede modelarse el problema mediante una ecuación y representarse con una gráfica? Describe cómo sería dicha gráfica.

c) Tomando en cuenta que tanto la velocidad de la mosca como la de los ciclistas es constante, ¿qué tipo de variación modela la función, lineal o cuadrática? Explica por qué.

TIC a tu alcance

Encuentra cómo resolvió Von Neumann el problema en el libro: Gardner, Martin. *Matemática para divertirse*. Granica Ediciones. Barcelona, España, 1988, pp. 30-31.

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados. Soliciten a su docente que verifique si son correctos o no y que les explique por qué.

Construye tu conocimiento

Resuelvan los siguientes planteamientos en parejas, en las que analizarán situaciones de variación lineal o cuadrática.

¿Alguna vez han visto juegos pirotécnicos? En la figura 5.36 pueden verse algunos.

Figura 5.36 Juegos pirotécnicos.

Cuando se lanzan al cielo primero se ven las luces de colores y después se escucha el trueno, esto sucede porque la luz viaja en el espacio aproximadamente a 300 000 km/s, mientras que el sonido lo hace mucho más lento.

1. ¿Qué distancia recorrerá la luz después de 10 s? Completen la tabla de la derecha.

   a) ¿Qué tipo de función describirá la gráfica correspondiente a los datos de la tabla, una lineal o una cuadrática? Expliquen por qué.

   b) ¿Cuál será la ecuación que modela el fenómeno anterior, teniendo como referencia la velocidad de la luz? Expliquen cómo la obtuvieron.

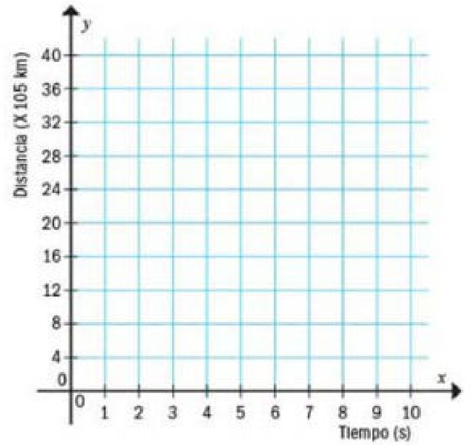
Tiempo (s)	Distancia (km)
1	300 000
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. Ahora tracen la gráfica en el plano de la derecha y respondan las siguientes preguntas.

   a) ¿Puede definirse qué tipo de función modela la gráfica, tomando en cuenta los puntos de las coordenadas que permitieron trazarla? Argumenten su respuesta.

   b) ¿En qué se basaron para saber qué tipo de función, lineal o cuadrática, se modela en este problema antes de trazar la gráfica?

   c) ¿Tiene que trazarse siempre una gráfica para determinar si la función de un fenómeno estudiado es lineal o cuadrática? ¿Por qué?



Comparen sus procedimientos y respuestas con las de sus compañeros.

Aplícalo

Resuelvan los siguientes planteamientos en parejas.

1. Un proyectil de impacto es lanzado hacia una montaña y se sabe que llegará a su objetivo durante su caída; la altura alcanzada y, en kilómetros, y la distancia recorrida x, en kilómetros, están dadas por la ecuación $y = -4x^2 + 8x$.

   Analicen el plano de la figura 5.37 en el que aparece la montaña y completen los valores de la tabla para dibujar la trayectoria del proyectil; fíjense en el ejemplo y después respondan las preguntas que se plantean.

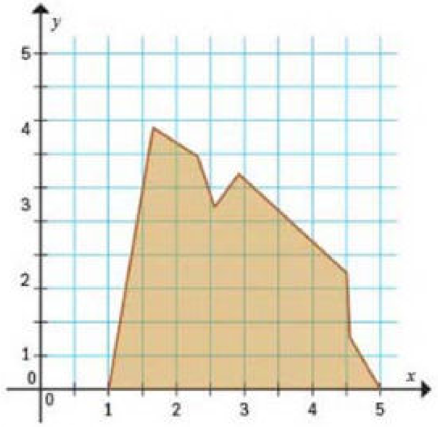


Figura 5.37

$y = -4x^2 + 8x$

$y = -4(0.5)^2 + 8(0.5)$

$y = -4(0.25) + 8(0.5)$

$y = -1 + 4$

$y = 3$

x	y
0	0
0.5	3
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	

a) ¿Cuáles son las coordenadas en que el proyectil logra impactar el objetivo?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil antes de comenzar a descender hacia su objetivo?

c) ¿Cómo se le nombra al patrón que sigue la trayectoria del proyectil?

d) ¿Qué tipo de función se modela mediante el problema anterior, lineal o cuadrática?

e) ¿Cuál es la diferencia entre la representación gráfica de una función lineal y una función cuadrática? ¿Y en sus ecuaciones?

f) ¿Qué sucedería con la trayectoria del proyectil si cambiamos los valores en la ecuación que lo modela? Prueben con otros valores y grafíquenlos en su cuaderno.

2. El gerente de la fábrica de guantes de piel de borrego "San Juan Capistrano" presentó ante la junta de inversionistas una gráfica para explicar la relación entre la cantidad de guantes producidos y su costo de producción en pesos (figura 5.38); obsérvenla y después respondan las preguntas.

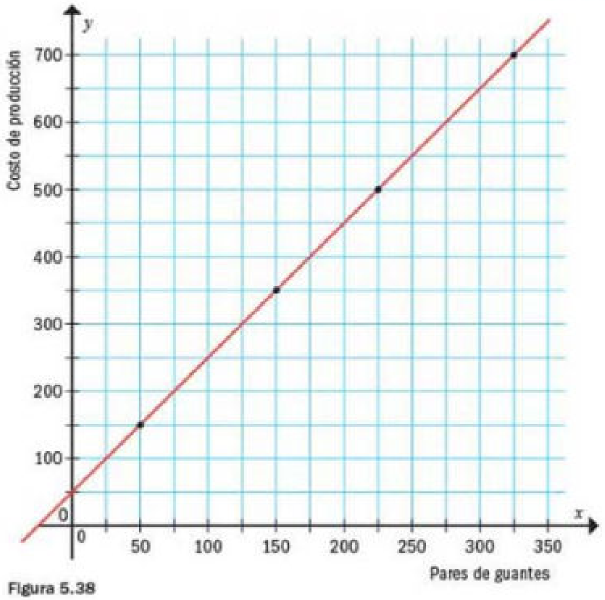


Figura 5.38

   a) ¿Cuál será el costo de producción para fabricar 500 pares de guantes? ¿Y para 700?

   b) ¿Cuántos pares de guantes se podrán fabricar con una inversión de 100 000 pesos?

   c) ¿Qué tipo de función se modela en este caso? Justifiquen su respuesta.

   d) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el costo de producción de cualquier cantidad de pares de guantes?

   e) Elaboren en su cuaderno una tabla para determinar el costo de producción de diferentes cantidades de pares de guantes, usen la ecuación que encontraron.

3. En un laboratorio se tiene un cultivo de bacterias que sirve para mejorar la calidad del suelo agrícola; bajo ciertas condiciones las bacterias se reproducen a razón de 2.5 millones de unidades (MDU) cada día; la colonia con la que inició el proyecto tenía un tamaño de 9 MDU.

   a) ¿Cuántas bacterias se tendrán una vez que hayan transcurrido 20 días?

   b) ¿Cuál es la representación algebraica que permite conocer la cantidad de bacterias en cualquier número de días que hayan transcurrido?

   c) Dibujen una tabla y una gráfica en su cuaderno, analícenlas y determinen a partir de ellas qué tipo de función se está modelando en este problema.

   d) Expliquen las características de una función lineal y las de una función cuadrática, ¿cuáles son sus semejanzas y cuáles sus diferencias?

Intercambien con otras parejas las estrategias que utilizaron para resolver los planteamientos anteriores. Verifiquen sus procedimientos y respuestas con su docente.

Los problemas que se modelan con una ecuación lineal o de primer grado, de la forma $y = mx + b$, pueden resolverse despejando la incógnita x, o bien, cuando se elabora una tabla con distintos valores para x, puede aplicarse la regla de tres simple o regla de tres inversa.

1. Para resolver una ecuación cuadrática o de segundo grado podemos aplicar al menos tres procedimientos:

a) Por el *método gráfico*. En el que se elabora una tabla con valores aleatorios para x y se sustituyen en la ecuación para encontrar el valor de y, ya que la ecuación sería de la forma $y = ax^2 + bx + c$. El siguiente paso sería usar un plano cartesiano para ubicar las coordenadas de los puntos de la forma (x, y), lo que formará una parábola que corta al eje de las abscisas en dos de sus puntos, los cuales son las raíces de la ecuación y por lo tanto la solución a la ecuación.

b) El *método de factorización*. Que consiste primeramente en ubicar los miembros de la ecuación del lado izquierdo con sus respectivos signos e igualarlos a cero, luego hay que factorizar el miembro de la izquierda en factores de primer grado, y por último cada factor de primer grado se iguala a cero y se obtienen las raíces y soluciones de la ecuación.

c) Por la *fórmula general*. En que deben colocarse los términos de la ecuación en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$ y después sustituir a, b y c en la fórmula correspondiente, así obtenemos dos raíces y la solución a la ecuación.

Pero hay algunos fenómenos que se desea representar gráficamente y que exigen conocer el valor máximo para x en la ecuación correspondiente, el cual deberá ser parte del eje de simetría de la parábola que modela la ecuación; en este caso, para obtener el valor máximo de x se aplica la fórmula: $\frac{-b}{2a}$

Este valor corresponde a la coordenada x, después sólo hay que sustituir x en la ecuación para obtener la coordenada y, por lo que hay que convertir la ecuación en una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, así no se obtienen las raíces de la ecuación ni su solución, sólo el punto más alto de la parábola, es decir, el valor máximo de la misma.

Construye tu conocimiento

Analiza cada una de las situaciones, haz los cálculos para responder los planteamientos y elabora en tu cuaderno las tablas y las gráficas que sean necesarias para modelar e interpretar el fenómeno estudiado.

1. Explica cómo puedes identificar una función cuadrática a partir de su representación gráfica.

2. ¿Cómo identificas una función lineal tomando como referencia su representación algebraica o su ecuación?

3. Una alberca de aguas termales cuyo origen es un manantial, tiene capacidad de 50 000 litros y se llena con un flujo de 15 $\frac{l}{\text{min}}$ en tiempo de lluvias, y de 9 $\frac{l}{\text{min}}$ en los meses más secos del año.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la alberca en temporada de lluvias?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse en los meses más secos del año?

c) ¿Cuál es la ecuación que modela el llenado de la alberca para cada una de las temporadas, si se sabe que los datos permiten establecer una función de la forma $y = mx + b$?

d) Elabora en tu cuaderno una gráfica que represente el llenado de la alberca, no olvides incorporar ambas funciones y graficarlas con distinto color, compáralas entre sí una vez que las tengas.

4. Un delfín salta sobre la superficie del océano; el recorrido que hace en uno de sus saltos desde que sale del agua está dado por la ecuación $y = -2x^2 + 5x$, y se sabe que durante el salto alcanza una altura máxima y avanza 2.5 m.

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el salto del delfín? Explica cómo lo calculaste.

b) ¿Qué forma tiene la trayectoria que sigue el delfín desde que sale y hasta que entra otra vez en el agua? ¿Por qué?

c) En un plano cartesiano grafica la función del salto del delfín y anota al menos cuatro pares de coordenadas, el punto de salida del agua y el punto de entrada a la misma.

5. Un hombre amenaza con dejar caer un objeto peligroso desde un edificio, a una altura de 194 m; se sabe que al soltarlo la velocidad inicial es de 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, las autoridades temen que ese objeto toque el suelo, por lo que pretenden interceptarlo en algún punto, pero necesitan conocer antes su comportamiento durante la caída.
   a) ¿Cuántos metros habrá recorrido el objeto una vez que transcurrieron 3 s? Considera: altura $h = v \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$, recuerda además que: g = 9.8 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

   b) Elabora en tu cuaderno una tabla en la que relaciones el tiempo transcurrido con la distancia recorrida por el objeto y la distancia a la que se encuentra el objeto del suelo.

   c) Explica cómo describirías el comportamiento de caída del objeto.

Compara tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros.

Cierre

TIC a tu alcance

En la siguiente página electrónica encontrarán información y ejercicios sobre proporcionalidad directa e inversa:
www.ditutor.com/proporcionalidad/regla_tres.html

En lecciones anteriores estudiamos que en la vida diaria hay muchos fenómenos en los que existe una variación proporcional y que dichos fenómenos pueden interpretarse elaborando tablas de valores y gráficas. Las variaciones pueden ser lineales, cuya representación es una línea recta en el plano cartesiano. Su ecuación puede tener las siguientes formas:

- $y = ax$, cuando pasa por el origen de coordenadas
- $y = mx + b$, cuando cruza el eje x en cualquier otro punto

donde m representa la constante de proporcionalidad o la razón de cambio, y b el punto en el que la recta corta el eje y.

Para encontrar los valores de x en una variación lineal podemos realizar los cálculos partiendo de encontrar el valor unitario de la proporción, o bien utilizar la regla de tres simple en el caso de la variación proporcional directa, o la regla de tres simple inversa cuando haya que calcular una relación de proporción inversa.

Existen muchos fenómenos que se modelan con una representación lineal, por ejemplo los trayectos a una velocidad constante, los estiramientos de un resorte o una liga al aplicarles una fuerza o colocarles un peso, las horas invertidas para realizar un proyecto, la fuerza que se debe aplicar a un cuerpo para que su aceleración sea constante, la cantidad de agua que sale por un grifo en un determinado tiempo, o la inversión de combustible para hacer funcionar una máquina, entre otros.

También existen muchos fenómenos que no es posible modelar mediante una función lineal, puesto que la representación gráfica de la función entre sus valores da como resultado una parábola; la forma general que modela este tipo de fenómenos es:

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

donde a es el coeficiente del término cuadrático y siempre deberá ser distinto de cero. Estas funciones se denominan cuadráticas o de segundo grado.

Taller de matemáticas

Organicen equipos de tres compañeros, revisen sus libros de Física, Química, Biología y algunos de la biblioteca, investiguen si hay en ellos fenómenos que puedan representarse mediante una función lineal o cuadrática.

1. Analicen un ejemplo para cada tipo de función y preparen su modelado y solución para que lo presenten al grupo; no olviden preparar tablas y gráficas.
2. Elaboren una tabla de dos columnas en las que clasificarán distintos fenómenos de acuerdo con su función (lineal o cuadrática), luego analicen sucesos y fenómenos de la vida cotidiana en los que exista variación lineal o cuadrática y que puedan representarse mediante alguna de esas funciones.
3. Expliquen cuál es la diferencia entre ambas columnas y después en qué consiste cada tipo de variación.

Resuelvan en su cuaderno los siguientes planteamientos en parejas.

1. Un granjero tiene 100 m de malla para cercar el perímetro de un corral, pero pretende aprovechar la barda de su casa, por lo que sólo necesitará tres paredes; ¿cuáles deberán ser las dimensiones del corral, de tal forma que tenga la mayor superficie posible?
2. Examinen la figura 5.39 que representa el corral y después realicen los cálculos que consideren necesarios para responder la pregunta anterior.
3. Analicen y respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.
   a) ¿De acuerdo con la representación gráfica, por qué crees que el largo del corral pueda expresarse mediante la ecuación $L = 100 - 2x$?
   b) ¿Qué tipo de ecuación, lineal o cuadrática, nos sirve para encontrar el área (A) del corral?
   c) ¿Cuál deberá ser la ecuación para encontrar el área (A) del corral cercado con los 100 m de malla?
   d) ¿Cuánto mide entonces el ancho del corral con la mayor área? ¿Y el largo?
   e) ¿Cómo diferencian una función lineal de una función cuadrática?

Expongan sus conclusiones al grupo y compárenlas con las que elaboraron otros equipos; corrijan si es necesario y complementen sus ideas con los comentarios que hagan los otros equipos y los de su docente.

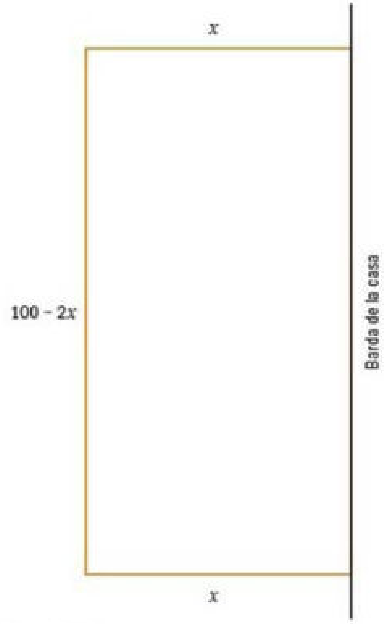


Figura 5.39

TIC a tu alcance

Consulta el siguiente enlace para recordar cómo se resuelve una ecuación cuadrática:
www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html

Condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo

Introducción

Figura 5.40 Existen diversos juegos de azar, como los dados, las cartas españolas e inglesas, la ruleta, el cubilete, la lotería y las máquinas tragamonedas, entre otros.

La canción popular titulada "El muchacho alegre", del autor Domingo Velarde, tiene una frase que a la letra dice: "Con una baraja nueva los quisiera ver jugar". ¿Qué significa esta frase?

En parejas, comenten las siguientes preguntas.

- ¿Qué significa la expresión "cartas marcadas"?
- ¿Qué quiere decir que las cartas estén "cargadas"?
- ¿Has oído hablar de "los dados cargados"?
- ¿Qué quiere decir que los dados estén "cargados"?

En un *juego de azar* en el que haya dados cargados o en otro en el que haya cartas marcadas, ¿las condiciones que se dan para ganar son justas para todos los jugadores?, ¿por qué?

Recuerda que un *juego de azar* es aquel en el que las condiciones para obtener un ganador no dependen de las habilidades o capacidades de los competidores, sino de las probabilidades que el juego en sí mismo otorga, es decir, del azar (figura 5.40).

Responde lo siguiente, y en cada caso escribe tu razonamiento.

1. El juego "¿Dónde quedó la bolita?", ¿es de azar?

2. Lanzar una moneda y tratar de anticipar el resultado, ¿es un juego de azar?

3. ¿Un volado (lanzar una moneda y predecir si será águila o sol) es un juego en el que los oponentes tienen las mismas probabilidades de triunfo, es decir, es equiprobable?

Al finalizar, y con ayuda de su profesor, organicen un debate para intercambiar ideas entre todo el grupo.

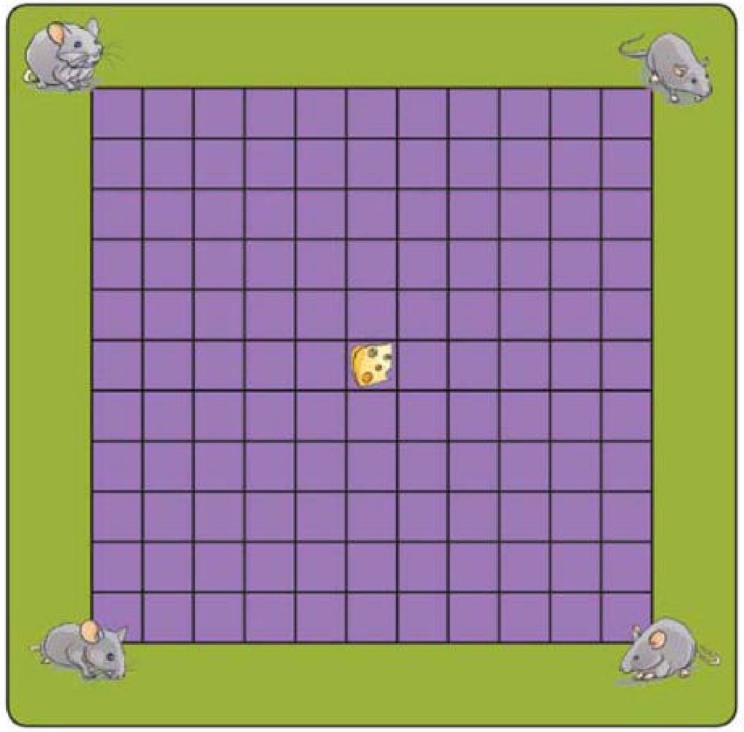
Para desarrollar los contenidos de esta lección necesitarán los siguientes materiales: tableros de juegos, cuatro dados de seis caras, una ruleta, monedas, fichas (roja, negra y rojinegra) y una lotería tradicional mexicana.

Recordemos que para hacer el cálculo de la probabilidad hay que dividir el número de resultados favorables entre el número de resultados posibles; y que el conjunto de todos los resultados posibles se denomina *espacio muestral*.

Construye tu conocimiento

En equipos de cuatro integrantes, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. En la feria del pueblo se presentaron muchos personajes típicos: el **prestidigitador**, el **malabarista**, el **ilusionista**, etcétera, entre ellos también asistió el que maneja los juegos de azar, en cuyo ***stand*** tenía el siguiente tablero:



Los ratones y el queso

Este juego lo pueden llevar a cabo de 2 hasta 4 jugadores. Se juega de la siguiente manera:

Reglas

a) Cada jugador aportará 5 pesos como entrada.

b) Se comienza desde el punto marcado para cada jugador en la esquina del tablero.

c) Para desplazarse a través del tablero se necesita lanzar una moneda por turnos, si sale sol no avanza, si sale águila se avanza una casilla en diagonal hacia el queso.

d) Cuando el jugador llegue al queso tendrá que esperar que la ronda de tiradas termine. En caso de ser el único se declara ganador, de lo contrario habrá empate.

Glosario

Prestidigitador. *Persona que hace juegos con las manos y otros trucos.*

Malabarista. *Persona que hace juegos de agilidad y destreza, manteniendo diversos objetos en equilibrio inestable, lanzándolos a lo alto y recogiéndolos, etcétera.*

Ilusionista. *Persona que practica el ilusionismo, es decir, el arte de producir fenómenos que parecen contradecir las leyes de la Naturaleza.*

Stand. *Instalación dentro de un mercado o feria para la exposición y venta de productos.*

Premio

a) Si participan 2 jugadores se pagará de premio $7.50 al ganador.

b) Si participan 3 o 4 jugadores se pagará de premio $10.

c) Si hay empate, se considerarán ambos ganadores y a cada uno se le darán $7.50 o $10, según el número de participantes.

Primero jueguen en parejas y posteriormente en equipos de cuatro participantes; y al terminar respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

1. ¿Todos los participantes tienen las mismas probabilidades de ganar? Expliquen su razonamiento.
2. De acuerdo con la escala de probabilidad, determinen cuál es la probabilidad de ganar de cada jugador.
3. ¿Las reglas del juego promueven que sea igual de probable ganar para todos los participantes? Expliquen su razonamiento.
4. ¿El premio es justo? Argumenten su respuesta.
5. Cuando sólo hay un ganador, ¿qué pasa con el resto del dinero recaudado?
6. ¿Cuál es su opinión respecto de este juego?

Compartan sus resultados y procedimientos con el resto del grupo.

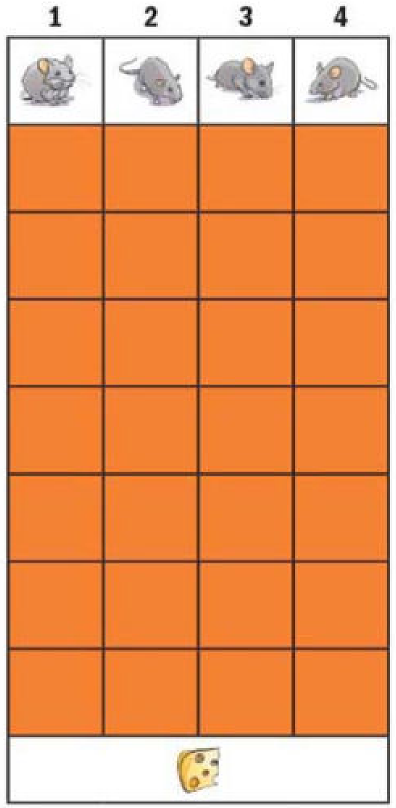


Figura 5.41

Al utilizar la *escala de la probabilidad* como punto de referencia para la comparación de dos eventos y determinar cuál es más probable que otros, tenemos la posibilidad de conocer las condiciones de triunfo que existen antes de comenzar a jugar.

Aplícalo

En otro de los juegos de ratones y queso se contaba con el tablero de la figura 5.41 y con la ruleta de la figura 5.42. Para jugarlo son necesarios 4 jugadores.

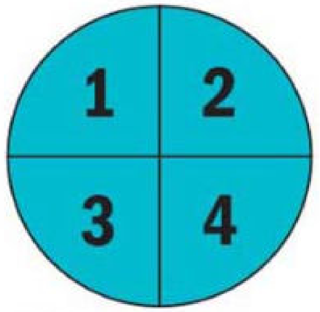


Figura 5.42

Reglas

1. Se comienza desde el punto marcado en la salida para cada jugador y se selecciona un número para participar.
2. Se gira una ruleta numerada del 1 al 4 con divisiones de la misma área, avanza una casilla el jugador del número que aparezca en la ruleta.
3. Cuando cualquier jugador llegue a la meta y atrape el queso, se declara ganador.

Lleven a cabo el juego en repetidas ocasiones, luego respondan en su cuaderno las siguientes preguntas.

1. Con base en los resultados obtenidos, ¿hay algún carril que tenga mayores probabilidades de ganar? Expliquen su razonamiento.
2. ¿Cuál es la probabilidad real de ganar de cada uno de los carriles?
3. Analicen las reglas del juego, ¿podemos decir que son justas para todos los participantes? Expliquen su razonamiento.

Comparen sus razonamientos y resultados con el resto del grupo.

Uno o más eventos son *equiprobables* cuando los jugadores tienen igual número de probabilidades de obtener lo que esperan; cuando esto sucede podemos determinar que el *juego es justo*.

Construye tu conocimiento

En equipos, lleven a cabo los siguientes juegos y respondan las preguntas. Con esta actividad verificarán si un juego de azar es justo.

1. Otro más de los juegos que había en la feria tenía un par de dados de 6 caras y 15 fichas, la descripción de cómo jugarlo es la siguiente:
   - Al interior del equipo, jueguen en parejas a lanzar los dados.
   - Cada vez que se tiran los dados se deben sumar los puntos obtenidos.
   - Si el resultado de la suma es un número par, gana una ficha el jugador 1.
   - Si el resultado de la suma es un número impar, gana una ficha el jugador 2.
   - Lancen los dados y registren cada uno de los resultados hasta agotar las fichas. Repitan todo el procedimiento en cuatro ocasiones.
   - Al término del juego en parejas, reúnanse en equipo y respondan las siguientes preguntas.

   a) ¿De qué forma podrían darse cuenta si el par o el impar tienen mayor probabilidad de ganar en este juego?

   b) ¿Las reglas serán justas para todos los competidores? En caso afirmativo, argumenten su respuesta. En caso negativo, ¿qué se tendría que hacer para que las reglas fueran justas?

2. En el *stand* de la feria también se contaba con un juego de lotería tradicional mexicana. Las reglas de ese juego son las siguientes:
   - Participan cuatro jugadores.
   - Para participar es necesario dar una entrada económica o simbólica que sea considerada equitativa para todos los jugadores.
   - Cada jugador puede participar con sólo una de las siguientes opciones al ir nombrando las cartas:
     - Línea (completando cualquier línea de ilustraciones –horizontal, vertical o diagonal– al interior de la tabla).
     - Esquinas (solamente completando las casillas que se localizan en las esquinas).
     - Llena (completar las 16 ilustraciones).
     - Pedrada (la primera ilustración que aparezca de toda la tabla).
     - Para seleccionar la opción, será necesario un sorteo de las mismas entre los jugadores, no pueden participar con la misma opción de triunfo.
     - El ganador del premio es aquel que reúna su opción elegida en primer lugar.

Jueguen y registren sus resultados, luego respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

a) ¿Cuál de las cuatro opciones presentadas tiene mayor probabilidad de triunfo? ¿Por qué?

b) En caso de considerar que el juego no presenta las mismas probabilidades para todos los participantes, ¿qué cambios harían a las reglas para que sí lo fuera?

c) ¿La distribución del premio es justa? ¿Por qué?

En caso de considerar que puede haber una mejor opción de distribución del premio para que sea justo, anótenla en su cuaderno.

Cierre

Condiciones para que el juego de azar sea justo:

- En cada jugada, o en el juego completo, las probabilidades de ganar para cada participante deben ser exactamente las mismas, es decir, ser equiprobable; por lo tanto, para reconocer si el juego es o no justo, debemos calcular la probabilidad que interviene en el juego.
- En caso de que las probabilidades de triunfo sean diferentes, debemos considerar que el participante que tenga menor probabilidad de ganar debe obtener un premio proporcionalmente mayor, con la intención de compensar sus probabilidades de triunfo.
- Es muy importante determinar que las reglas o las condiciones del juego no favorezcan a ninguno de los participantes.

Taller de matemáticas

A continuación se presenta otro juego de ratones y queso que se ofrece en un *stand*; las condiciones del juego, a realizarse entre cuatro jugadores, son:

Reglas

1. Se comienza desde el punto marcado en la salida para cada jugador y se selecciona un número para participar.
2. Se gira una ruleta numerada del 1 al 4, como la que aparece en la figura 5.43; el número de jugador que aparezca en la ruleta avanza una casilla en el tablero (figura 5.44).
3. Cuando cualquier jugador llegue a la meta y atrape el queso, se declara ganador.

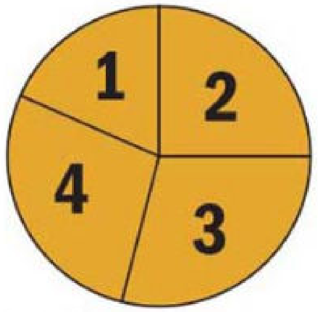


Figura 5.43

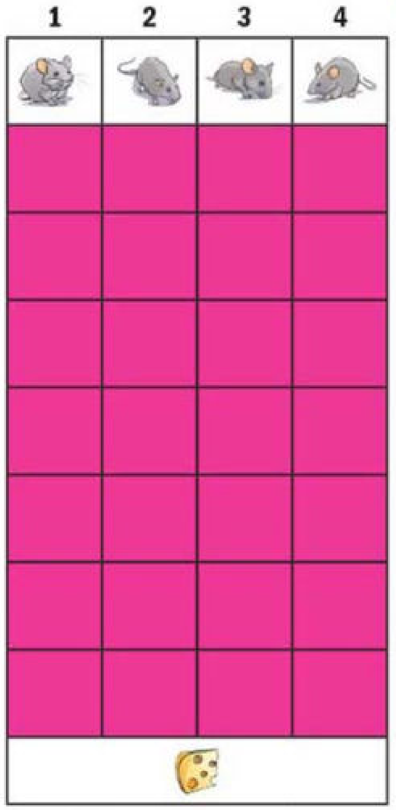


Figura 5.44

Realicen el juego en repetidas ocasiones, analicen los resultados que obtienen en la ruleta y después contesten por equipo las siguientes preguntas.

a) ¿Hay algún carril que tenga mayores probabilidades de ganar? ¿Por qué?

b) ¿Las reglas del juego son justas para los cuatro participantes al jugar con esta ruleta?
   - En caso positivo, argumenten su respuesta.
   - En caso negativo, ¿qué necesitamos hacer para que tanto el premio como las reglas sean justos?

Diseñen un juego de azar en el que las condiciones de participación sean justas.

Diseñen un juego de azar en el que haya resultados no equiprobables, pero que el premio sea justo.

Compartan sus diseños con el resto del grupo, jueguen y determinen si cumplieron con las condiciones dadas.

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

Los arcoíris

¿Te has preguntado alguna vez cómo se forma un arcoíris?, o bien, ¿por qué esos magníficos arcos parecen seguir a la persona que los mira, y por qué se debe tener el Sol a la espalda para poder mirarlos?, ¿los colores que se ven aparecen siempre en el mismo orden?, ¿siempre son los mismos colores?

Estas intrigantes preguntas y otras más encontraron su respuesta casi definitiva a finales del siglo XIII, simultáneamente en Oriente, por el destacado matemático y físico persa Al-Farisi (1267-1300), y en Occidente, por el teólogo y físico alemán de la orden dominica Thierry de Freiberg (1250-1310).

Sin tener contacto entre ellos, estos dos estudiosos, apoyados ambos en la obra sobre óptica del matemático, físico y astrónomo musulmán Ibn al Haytham (965-1039), mejor conocido en Occidente como Alhazen, propusieron diversos experimentos con bases científicas sólidas, así como una teoría de la formación de los colores, describieron también el papel de las gotas de agua en la formación del arcoíris y determinaron la trayectoria de los rayos luminosos tanto en el arcoíris primario como en el secundario, que es aproximadamente el doble de ancho que el primario y tiene invertido sus colores (figura 5.45).

En particular, Thierry, en algún momento entre 1304 y 1310, produjo la obra *De iride et radialibus impressionibus (Respecto al arcoíris y las impresiones de la radiación).*

Figura 5.45 Arcoíris primario y secundario.

En ella se da la explicación correcta para la formación del arcoíris. Explica el arcoíris primario, el arcoíris secundario y por qué se invierten los colores, así como el paso de luz que se necesita para que se forme el arcoíris.

En esa obra el dominico Thierry se mostró particularmente audaz e innovador en cuanto a la forma de representar los rayos luminosos: en vez de la representación clásica de un rayo de luz como una sola recta, la sustituía por una forma mucho más compleja, la de un haz de rectas.

La figura 5.46 es una reproducción del manuscrito original de Thierry, y en ella se ilustra la técnica usada para la formación del arcoíris secundario.

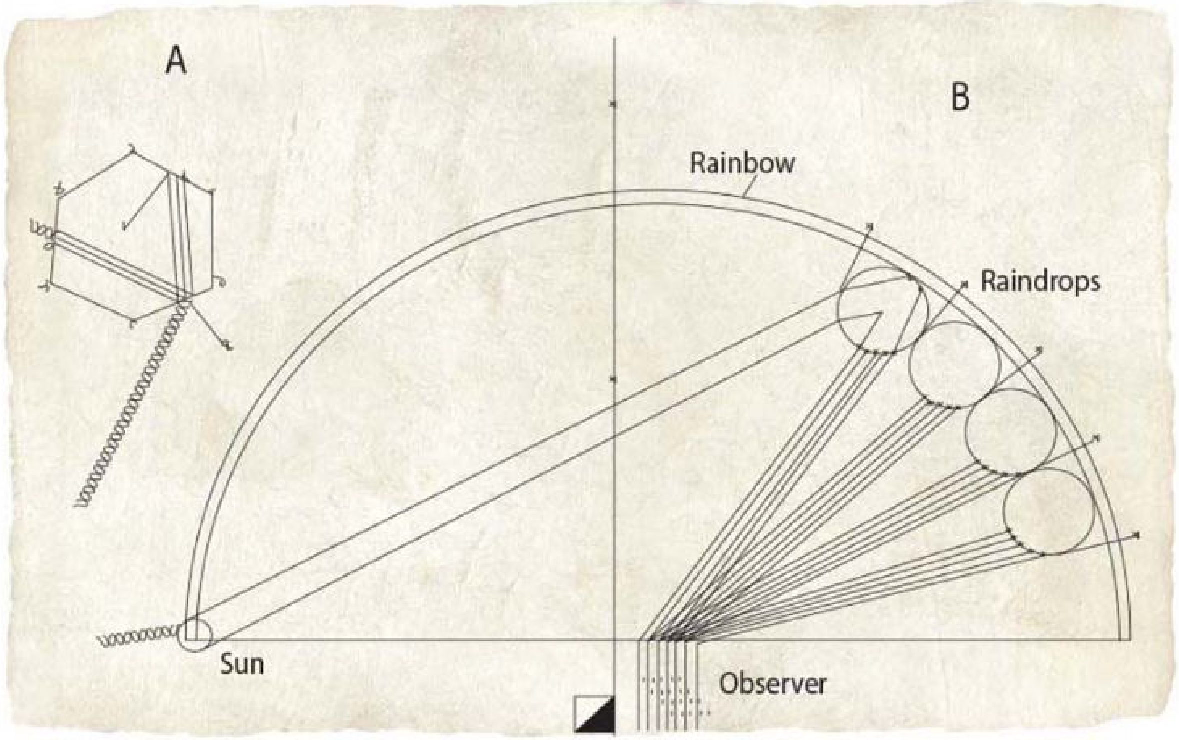


Figura 5.46 Reproducción del manuscrito original de Thierry de Freiberg.

Del lado izquierdo de la figura 5.46 se ven cuatro haces de rectas que salen del Sol y se dirigen a cuatro esferas que representan a cuatro gotas de agua. Estos rayos sufren una primera *refracción* al penetrar por primera vez la gota de agua, luego ocurren dos *reflexiones* en el interior de las gotas, para finalmente terminar de descomponer en cuatro haces de cuatro colores (rojo, amarillo, verde y azul) con una última refracción a la salida de la gota de agua.

Estos cuatro haces coloreados se dirigen todos hacia el observador, que se encuentra en el centro de la figura 5.46. Este último, sin embargo, no percibe más que uno de los colores de cada uno de los cuatro haces de luz, y además los percibe en el orden inverso al orden en que se formaron.

Ni el físico, filósofo, teólogo, alquimista y matemático inglés Isaac Newton (1642-1727), ni el filósofo, matemático y físico francés René Descartes (1596-1650), considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, **osaron** tres siglos más tarde retomar estas ideas geniales.

Glosario

Osar. Atreverse, emprender algo con audacia.

EVALUACIÓN TIPO PISA

Lee las siguientes situaciones y resuélvelas. Escribe tu razonamiento y tus procedimientos dentro del recuadro.

1. Se requiere construir uno o dos contenedores cilíndricos de capacidad industrial sobre un terreno rectangular de 50 por 30 metros. Analiza y contesta las siguientes preguntas, justificando tus razonamientos.
   a) ¿Cuál debe ser el radio máximo para que se aproveche la mayor superficie del terreno?

   b) Si se requiere que la altura del contenedor sea de 30 m, ¿cuál es la capacidad máxima?

   c) Si en vez de construir un solo contenedor se construyen dos iguales, con un espacio entre ellos de 10 m, ¿cuál es el radio máximo que deben tener?

   d) Si la altura de los contenedores es de 30 m, ¿qué conviene más respecto a la capacidad de almacenamiento, uno o dos contenedores?

   e) Si el máximo que se requiere almacenar es de 17 000 m³, y el costo de construcción por metro cúbico es de $1 800.00, ¿qué conviene más, uno o dos contenedores?

EVALUACIÓN TIPO ENLACE

Subraya la respuesta correcta en los siguientes reactivos.

1. Determina el sistema de ecuaciones que solucione la siguiente situación:

   En una cafetería se venden dos tipos de café, uno a \$50 el kg y el otro a \$85 el kg, ¿cuántos kilogramos de cada tipo se deben mezclar para obtener una combinación que se pueda vender a \$71 el kilogramo?

a) $x + y = 71$, $50x + 85y = 1$ b) $x + y = 1$, $50x + 85y = 71$ c) $x + 85y = 1$, $50x + y = 71$ d) $50x + y = 1$, $x + 85y = 71$

2. La altura de un triángulo mide tres centímetros menos que la base sobre la que está trazado. El área del triángulo es de 20 cm², ¿cuál de las siguientes ecuaciones plantea el problema?

   a) $x(x + 3) = 20$
   b) $x^2 + 3x = 20$
   c) $x^2 - 3x = 40$
   d) $x(x + 3) = 40$

3. Se tiene un cono con radio de la base de 6 cm y una altura de 10 cm; si se construye un segundo cono cuyas dimensiones son el doble que las del primero, ¿cuál es su volumen?

   a) 2880π cm³
   b) 720π cm³
   c) 1440π cm³
   d) 360π cm³

4. Un cilindro tiene un volumen de 3 600 cm³; si el radio del cilindro es la raíz cuadrada de la altura, ¿cuánto miden el radio de la base y la altura del cilindro?

   a) $60\sqrt{\pi}$
   b) $\frac{60}{\pi}$
   c) $\frac{360}{\pi}$
   d) $\frac{60}{\sqrt{\pi}}$

5. La presión atmosférica a nivel del mar es de 101.325 kPa; por cada diez metros de profundidad en el mar la presión aumenta 101.325 kPa, ¿cuál es la ecuación que describe dicho fenómeno?

   a) $y = -x + 1013.25$
   b) $y = 1013.25(1 - x)$
   c) $y = 1013.25(x + 1)$
   d) $y = 1013.25x$

EVALUAR PARA APRENDER

Completa la siguiente tabla, para ello reflexiona sobre cada indicador de aprendizaje del bloque.

Aspectos a evaluar	¿Qué hice para lograrlo?	¿A qué dificultades me enfrenté?
Puedo resolver problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.		
Calculo la medida del radio de la circunferencia que se obtiene al cortar un cono perpendicularmente a su eje.		
Resuelvo problemas que impliquen calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas.		
Leo y represento, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.		
Resuelvo problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		

Valora tus actitudes para el trabajo en equipo. Responde en tu cuaderno.

a) ¿Cómo fue mi participación durante las actividades colaborativas?

b) ¿Qué actitudes y valores puse en práctica al emitir opiniones y escuchar las de mis compañeros?

c) Solicita a tu docente que escriba algunas sugerencias para ayudarte a lograr los aprendizajes esperados y a mejorar tus actitudes en el trabajo en equipo, así como tu tolerancia e inclusión de tus compañeros en las actividades escolares.

d) Solicita a uno de tus padres o a tu tutor que lea tu autoevaluación y los comentarios de tu docente. Pide que te escriba algunas recomendaciones para mejorar tu proceso de aprendizaje. Asimismo, si es necesario, que escriba algún comentario para tu docente.

Bibliografía para el alumno

Berlanga Zubiaga, Ricardo, *et al.*, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, colección La ciencia para todos, 163, FCE-SEP-CONACyT, 2004.

Bracho Carpizo, Javier, *¿En qué espacio vivimos?*, colección La ciencia para todos, 77, FCE-SEP-CONACyT, 2003.

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números: un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*, Ediciones Siruela, 2008.

Fernández Bravo, José Antonio, *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*, Educación infantil y primaria, Ediciones Walters Kluwer, España, 2008.

Gardner, Martin, *Matemática para divertirse*, Granica Ediciones, Barcelona, España, 1988.

Illanes Mejía, Alejandro, *La caprichosa forma de globión*, colección La ciencia para todos, 168, FCE-SEP-CONACyT, 1999.

Montejano Peimbert, Luis, *La cara oculta de las esferas*, colección La ciencia para todos, 75, FCE-SEP-CONACyT, 2003.

Peña Mena, José Antonio de la., *Álgebra en todas partes*, colección La ciencia para todos, 166, FCE-SEP-CONACyT, 1999.

Perelman, Y., *Matemática recreativa*, Cultura popular, México, 1985.

Pickover, Clifford A., *Las matemáticas de Oz. Gimnasia mental más allá del límite*, Almuzara, S.L., Barcelona, España, 2007.

Prieto de Castro, Carlos, *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, colección La ciencia para todos, 206, FCE-SEP-CONACyT, 2005.

Prieto de Castro, Carlos. *Sarando vuelve al mundo de las matemáticas*, colección La ciencia para todos, 233, FCE-SEP-CONACyT, 2012.

Ricotti, Stella, *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas. Interconexiones entre los contenidos curriculares y soluciones para la clase de matemática*, Novedades Educativas S.A. de C.V., México, 2011.

Universidad Nacional Autónoma de México. *Enciclopedia de conocimientos fundamentales*, UNAM-Siglo XXI, 2010.

Libros electrónicos

Libros del Rincón, Programa Nacional de Lectura y Escritura, Catálogo de selección, disponible en:

http://lectura.dgme.sep.gob.mx/coleccion/CatalogosDeSeleccion/2011-2012/secundaria3.pdf (Selección 2011-2012)

http://lectura.dgme.sep.gob.mx/coleccion/CatalogosDeSeleccion/2012-2013/secundaria3.pdf (Selección 2012-2013)

Habilidades Digitales para Todos, Materiales Educativos Digitales, disponible en: http://www.hdt.gob.mx/hdt/materiales-educativos-digitales/

Bibliografía para el maestro

Bonnell, Carmen, *La divina proporción. Las formas geométricas*, Ediciones UPC, Barcelona, España, 1999.

Bracho, Javier, *Introducción analítica a las geometrías*, FCE, México, 2009.

Bravo M., Alejandro *et al.*, *Álgebra superior*, Prensas de Ciencias, 1ª ed., 2006.

Brousseau, Guy, *Educación y didáctica de las matemáticas*, Santillana, México, 2000.

Cárdenas, H. *et al.*, *Álgebra superior*, Trillas, México, 1997.

Courant, Richard, *¿Qué es la Matemática?*, FCE, México, 2003.

Kreigszig, E., *Introducción a la estadística matemática*, Limusa, México, 1973.

Pacioli, Luca, *La Divina Proporción*, Akal, S.A., 1991, traducción del original de 1509.

Perelman, Y., *Álgebra recreativa*, Cultura popular, México, 1985.

Pólya, George, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1969.

Ramírez Galarza, Ana Irene, *Geometría analítica. Una introducción a la geometría*, Prensas de Ciencias, 1ª ed., 2004.

Ramírez Galarza, Ana Irene, *Introducción a la geometría avanzada*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2002.

Rincón, Luis, *Curso intermedio de probabilidad*, Prensas de Ciencias, 2ª ed., 2008.

Rincón Mejia, H.A., *Álgebra lineal*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2001.

Roldán Calzado, Juan Luis, *Las matemáticas no dan más que problemas*, Lulu Press, Inc., Estados Unidos, 2007.

Correo del maestro. *Revista para profesores de educación básica*, disponible en: www.correodelmaestro.com

Libros electrónicos

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, disponible en: www.clame.org.mx/relime.htm

Revista Latinoamericana de Etnomatemática, disponible en: www.etnomatematica.org/home/?page_id=31

PNA. *Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*. Disponible en: www.pna.es

Bibliografía consultada

Artin, Michael. *Algebra*. Prentice-Hall. New Jersey, 1991.

Beardon, Alan F. *Algebra and geometry*. Cambridge University Press, 2005.

Birkhoff, Garrett; Mac Lane, Saunders. *Algebra*. 3 ed. Chelsea, 1999.

Coxeter, H. S. M. Geometry revisited. *New mathematical library*. Mathematical association of America. Washington, 1967.

De la Peña, J.A. (comp.), *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, Siglo XXI Editores, México, 2002.

Grimm, Laurence G. *Statistical applications for the behavioral sciences*. J. Wiley, New York, 1993.

Hilbert, David; *et al.*, *Geometry and the imagination*. Chelsea. New York, 1952.

Kinney, John J. *Probability: an introduction with statistical applications*. J. Wiley, New York. 1997.

Niven, Ivan. *An introduction to the theory of numbers*. Wiley. New York, 1980.

Créditos iconográficos

© **iStockphoto:** pp. 15, 52, 64, 65, 71, 73, 101, 109, 124, 140, 152, 163, 166, 170, 202, 215, 218, 223, 228(1, 3, 4, 5, 6), 244, 247, 251, 258, 264.
National Library of Australia http://nla.gov.au/nla.map-nk10241: p. 208(1).

Matemáticas 3

Matemáticas 3 favorece y fomenta el trabajo colaborativo en el aula para el desarrollo de capacidades como la observación, el análisis, la síntesis y la solución de problemas a partir de situaciones individuales y en equipo que enriquecen el logro de los aprendizajes significativos.

La obra está organizada en secuencias didácticas que facilitan la construcción de los conocimientos básicos y centrales de cada bloque y el desarrollo de las competencias de la asignatura. Secciones como "Construye tu conocimiento" y "Aplícalo" favorecen que los estudiantes asuman un papel más activo en su aprendizaje al intercambiar ideas y reflexionar sobre contenidos diversos.

Las actividades se presentan en contextos cercanos y reales al estudiante para ayudarle a reflexionar sobre las aplicaciones de las matemáticas en su vida cotidiana. En la sección "Matemáticas en contexto", al final de cada bloque, se presenta información relacionada con los aprendizajes del bloque, así como sus aplicaciones en diversas disciplinas y problemas específicos que resolvieron grandes matemáticos de la historia.